I

Formación del concepto de masa

1. **Planteamiento del problema.** La definición de masa contenida en el enunciado según Painlevé del principio de acción y reacción (1), que es la mejor de todas las que disponemos, con ser plenamente satisfactoria desde un punto de vista axiomático, carece no obstante del poder sugestivo y del calor humano que adquiere una idea cuando junto a su formulación meramente conceptual se logra reconstituir el proceso histórico y psicológico de su formación. La noción de masa surge en la presente nota como un producto natural de la Ley L del cuadrado de la distancia que Newton dedujo a partir del principio copernicano de la inercia (2).

2. **Punto de partida.** Siguiendo de cerca la notación de Lindsay y Margenau (3), designaremos por a_{ps} el valor escalar de la aceleración centrípeta ejercida por el sol S sobre el planeta P. (Se recordará que la componente tangencial es nula (4). La ley L del cuadrado de la distancia en su forma más restringida puede enunciarse, entonces, de la siguiente manera:

$$a_{ps} = \frac{\lambda_s}{r_{ps}^2}$$

fórmula en que r_{ps} representa la distancia que media entre sol y planeta y λ_s es un coeficiente que no depende del planeta (5) sino que del sol exclusivamente y que podemos llamar "masa gravitacional absoluta del sol". Como se sabe,

$$\lambda_s = \frac{h^2}{p}$$ en que p es el semi latus-rectum de la órbita elíptica

correspondiente y h es la constante areolar (característica de cada planeta) definída por la segunda ley de Kepler,

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h,$$ expresada en coordenadas polares.

Ahora bien, si aceptamos con Newton que el sol a su vez experimenta una aceleración del mismo tipo debido a la influencia del planeta, será lícito escribir

$$a_{sp} = \frac{\lambda_p}{r_{sp}^2}$$

Por analogía λ_p puede llamarse "masa gravitacional absoluta del planeta".

Designaremos por L' la ley del cuadrado de la distancia resultante de esta primera generalización.

Sin entrar en pugna con las implicaciones experimentales, L' puede suponerse válida también para cualquier par de cuerpos del sistema solar. Así obtenemos una ley L" que por su parte, puede someterse a un tercer proceso de generalización que incluya a todo par de cuerpos: luna y piedra que cae por ejemplo.

Sea L"' esta última forma de la ley del cuadrado de la distancia. Como se sabe, ella constituye la forma definitiva de la ley newtoniana y tiene, entre otros, el mérito de unificar la mecánica terrestre con la celeste.

3. **Condiciones gravitacionales.** Sean A y B, pues, dos cuerpos cualesquiera, situados a cierta distancia el uno del otro. Tomando a uno de ellos a A por ejemplo, como cuerpo de referencia, definiremos la "masa gravitacional relativa de B respecto de A por la razón constante $\frac{\lambda_B}{\lambda_A}$ que designaremos por K_{BA}, en que λ_A y λ_B son las masas gravitacionales absolutas asociadas a A y B por L"'.

Salta a la vista la primera consecuencia significativa de la definición propuesta:

$$\text{(I)} \qquad K_{BA} = \frac{a_{AB}}{a_{BA}}$$

Es decir: la razón de las aceleraciones gravitacionales es constante e igual a la masa gravitacional relativa de uno de los cuerpos respecto del otro.

Imaginemos ahora un tercer cuerpo C en presencia de A y B y, bajo la suposición de que la presencia de un tercer cuerpo no afecta en nada a las masas gravitacionales, que han sido definidas a partir de la influencia recíproca de dos cuerpos, definamos análogamente los símbolos K_{CB}, K_{CA}. Ellos resultan relacionados entre sí por la siguiente expresión:

$$\text{(II)} \qquad K_{CB} = \frac{K_{CA}}{K_{BA}}$$

En efecto: $K_{CB} = \frac{\lambda_C}{\lambda_B}$ por definición (i)

Por otra parte $K_{CA} = \frac{\lambda_C}{\lambda_A}$

y $K_{BA} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A}$, también por definición.

De modo que

$$\frac{K_{CA}}{K_{BA}} = \frac{\lambda_C}{\lambda_B} \qquad \text{(ii)}$$

Comparando (i) y (ii) resulta (II) que para los efectos de esta nota constituye la segunda y última implicación importante contenida en la definición de masa gravitacional relativa.

En el terreno de las interacciones gravitacionales es posible, pues, asociar a los cuerpos coeficientes que satisfacen las condiciones (I) y (II).

4. **Condiciones inerciales.** La pregunta crítica que nos formulamos ahora es la siguiente: ¿No será posible hacer otro tanto con las interacciones mecánicas generales o inerciales entre los cuerpos? (choque, por ejemplo) O sea, ¿no será posible asociar a los cuerpos coeficientes m_{BA}, m_{CA}, m_{DA},... etc., que satisfagan las condiciones (I) y (II) cuando se trata no ya de interacciones gravitacionales sino de interacciones mecánicas cualesquiera?

La respuesta documentada a esta pregunta requeriría del estudio exhaustivo de las diferentes categorías de interacciones mecánicas de que son susceptibles los cuerpos. (Tal vez cada una de ellas dé origen a un concepto específico de masa: masa de choque, etc.). Pero inspirándonos en el principio de continuidad de Mach (7) podemos legítimamente, eludir ese camino tan largo, y pasar a postular a priori la existencia de tales coeficientes. Es lo que hace Painlevé, precisamente, aunque sin dejarnos entrever el telón de fondo del asunto.

sin

5. **Coincidencia entre masa inicial y gravitacional.** La mecánica clásica se apresura en este punto a identificar, sus mayores escrúpulos, la masa inicial de un cuerpo con su masa gravitacional.

6. **Resumen.** A grandes rasgos, los diferentes pasos del proceso de formación del concepto de masa serían, entonces, los siguientes:

1) Tablas astronómicas de Tycho Brahé.
2) Leyes de Kepler y Principio de Inercia.
3) Ley del cuadrado de la distancia L.
4) Ley del cuadrado de la distancia L'.
5) Ley del cuadrado de la distancia L''.
6) Ley del cuadrado de la distancia L'''. *
7) Concepto de masa gravitacional absoluta.
8) Concepto de masa gravitacional relativa.
9) Condiciones gravitacionales (I) y (II).
10) Generalización de las condiciones gravitacionales a condiciones mecánicas generales o inerciales, y
11) Identificación entre masa inicial y gravitacional.

* Esta atrevida generalización encuentra un punto de apoyo bastante sólido en la coincidencia casi absoluta que se descubre entre el valor de la aceleración centrípeta lunar cuando se le calcula a partir de la fórmula del movimiento circunferencial uniforme y el valor de la misma arrojado por la ley del cuadrado de la distancia L''' que concibe en los mismos términos fenómenos aparentemente dispares como el desplazamiento lunar y la caída de una piedra.

Como la Astronomía de los tiempos de Newton conocía ya el período T de revolución de la luna en torno a la tierra, el radio terrestre r, y el radio R de la órbita lunar (la excentricidad de la elipse lunar es muy pequeña) nada costó, en efecto, calcular aluna por cada uno de los métodos señalados.

BIBLIOGRAFIA

1. "Cours de Mécanique". Paul Painlevé, tomo I, pág. 85. Gauthier Villars, Paris, 1930.
2. "The Science of Mechanics". E. Mach., pág. 227. The Open Court, London, 1942.
3. "Foundation of Physics". R. B. Lindsay and H. Margenau, pág. 92, John Wiley, N. York, 1936.
4. "Classical Mechanics". D. E. Rutherford, pág. 11, Oliver and Boyd, London, 1954.
5. Ver (4), pág. 24.
6. Ver (4), pág. 24.
7. Ver (4) págs. 168, 334 y 558.

A) $$a_{luna} = \frac{V^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2\ 60\ r}{T^2}$$ ya que $R = 60\ r$

$$a_{luna} \approx 0{,}0027061 \left[\frac{m}{seg^2}\right]$$ si se recuerda que

$$2\pi r = 40.000.000\ \ m \qquad y\ T = 27{,}321.661\ \text{días}$$

B) Por otra parte L''' aplicada una vez a una piedra y otra a la luna, permite escribir las siguientes ecuaciones:

$$a_{piedra} = \frac{\lambda_T}{r^2}$$

$$a_{luna} = \frac{\lambda_T}{R^2}$$

donde λ_T representa la masa gravitacional absoluta de la tierra; expresiones que divididas miembro a miembro conducen a

$$a_{luna} = \frac{a_{piedra}}{60^2} = \frac{9{,}8088}{60^2}\left[\frac{m}{seg^2}\right] = 0{,}0027246 \left[\frac{m}{seg^2}\right]$$

si tomamos para a_{piedra} el valor $9{,}8088 \left[\frac{m}{seg^2}\right]$

(Esta demostración que aunque en espíritu es la misma propuesta por Newton tiene sobre la demostración clásica la ventaja de no valerse para nada del concepto de fuerza, circunstancia que a nuestro modo de ver, justifica su incorporación a la presente nota)

NICANOR PARRA

Profesor de Mecánica Racional en el
Instituto Pedagógico de la
Universidad de Chile