

UN MODELO TEORICO PARA LOS ACELEROGRAMAS DE TEMBLORES FUERTES

Arturo ARIAS*

Luis PETIT LAURENT**



RESUMEN

Un análisis de la respuesta de una capa elástica horizontal homogénea de espesor constante soldada a un medio elástico semi-infinito y sobre la cual incide un tren de ondas transversales que se propaga según la vertical, conduce a proponer un modelo teórico de los acelerogramas de temblores fuertes consistente en filtrar un segmento de ruido blanco de duración finita a través de un oscilador simple en que el amortiguador y el resorte están dispuestos en serie.

Se establece a partir de este modelo una expresión para estructuras lineales que coincide satisfactoriamente con los espectros standard propuestos por Housner a base de un análisis de espectros de temblores reales.

INTRODUCCION

Varios modelos teóricos del movimiento del suelo durante temblores fuertes han sido propuestos por diferentes investigadores. En algunos de estos modelos, el movimiento es representado como un ruido blanco^{1,2,3}. Otro tipo de modelo se basa sobre la hipótesis de que el movimiento puede considerarse como una sucesión de pulsos rectangulares de velocidad o de aceleración, distribuidos de acuerdo con cierta ley probabilística en cuanto a magnitud, signo o intervalo de tiempo entre los pulsos^{4,5,6}. Finalmente Bogdanoff, Goldberg y Bernard⁷ han propuesto un modelo en el cual la aceleración del suelo es repre-

* Director del IDIEM. Profesor de Mecánica Racional de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile.

**Ingeniero Civil. IDIEM. -

sentada como un tren de ondas sinusoidales moduladas en amplitud.

La representación del movimiento sísmico como ruido blanco tiene la ventaja de su simplicidad, pero no está de acuerdo con la observación experimental. Se ha podido demostrar^{8,9} que el movimiento del suelo en los temblores reales está muy lejos de ser representable como ruido blanco; esta misma conclusión fluye de los datos publicados sobre espectros de respuesta de osciladores lineales. Además, desde un punto de vista teórico, este modelo no es satisfactorio, porque implica algunas consecuencias físicamente absurdas, como ser que la potencia total es infinita. Sin embargo, varios investigadores han mostrado que este modelo explica cualitativamente algunas características de los espectros de respuesta máxima de osciladores lineales.

Las desventajas más importantes del ruido blanco como modelo del movimiento sísmico son: a) su inadecuación para tener en cuenta el carácter transitorio del fenómeno; b) la dificultad que ofrece para incorporar en la descripción las características diferentes que ofrecen los terremotos ocurridos en distintas localidades, especialmente en relación con la influencia de las condiciones particulares del suelo.

Se puede obtener un modelo mejor utilizando un ruido blanco de banda limitada y de duración finita. Pero, aun en tal caso, todavía subsiste en el modelo una buena dosis de arbitrariedad, incluso si la banda de frecuencias elegida está relacionada en alguna forma con las propiedades del suelo en el lugar del temblor. La hipótesis de distribución uniforme de la potencia dentro de la banda de frecuencias elegida sigue siendo arbitraria y no está corroborada por los hechos que se derivan de la observación de temblores reales. Este tipo de modelo puede, entonces, descartarse desde un comienzo.

Los modelos que representan el movimiento sísmico como trenes de pulsos o como trenes de ondas son equivalentes desde el punto de vista de la teoría, ya que las series temporales pueden analizarse en cualquiera de estas dos formas alternativas. Cuál forma se elija es sólo cuestión de conveniencia. Este tipo de modelo ofrece posibilidades más promisorias. En primer lugar, permite tratar los temblores como fenómenos transitorios. En segundo lugar, atribuyendo al modelo algunas propiedades estadísticas adecuadas, resulta posible, al menos en principio, construir "ensembles" de temblores artificiales cuyos elementos se asemejan a los temblores reales registrados en una localidad determinada. Una elección conveniente de estas propiedades nos debería permitir la construcción de "ensembles" distintos que calcen con las condicio

nes propias de diferentes localidades. Finalmente, este tipo de modelo abre la posibilidad de hacer estudios teóricos bien fundados sobre el comportamiento estadístico de las estructuras no-lineales, que por principio no pueden ser analizadas con la técnica usual del espectro de respuesta de osciladores lineales.

El presente trabajo es un intento para establecer un modelo como el recién descrito, que tenga en cuenta a la vez las condiciones teóricas que todo modelo debe satisfacer, y los hechos conocidos a través del análisis de registros de terremotos reales.

1.- Razón de amortiguamiento para las vibraciones de corte de una capa elástica horizontal

Consideremos una capa elástica homogénea de espesor H, limitada por dos planos horizontales, tales que el superior coincide con la superficie libre y el inferior está fijo (Fig. 1).

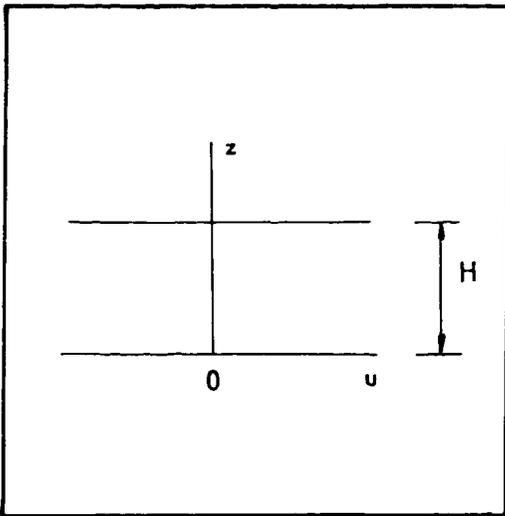


Fig. 1. Capa elástica homogénea de espesor H con borde inferior fijo.

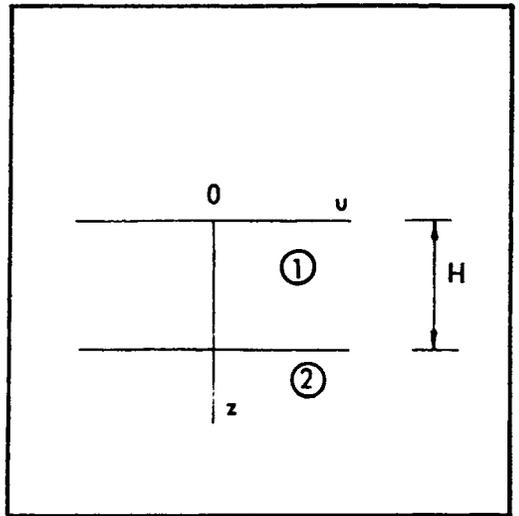


Fig. 2. Capa elástica homogénea de espesor H soldada sobre medio elástico semi-infinito.

La ecuación diferencial de las vibraciones de corte que se propagan en la dirección vertical es:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \xi \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} \tag{1}$$

en que

u = desplazamiento horizontal de la capa a la cota z

ρ = densidad

μ = constante elástica
 ξ = constante de amortiguamiento
 z = coordenada vertical
 t = tiempo

Las condiciones de borde son

$$\text{para } z = 0 \quad u = 0 \quad (2)$$

$$\text{para } z = H \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Busquemos una solución de la ec. (1) de la forma

$$u = F(t) G(z) \quad (4)$$

Debe cumplirse, entonces, que

$$\frac{\rho G}{\frac{d^2 G}{dz^2}} = \mu \frac{F}{\frac{d^2 F}{dt^2}} + \xi \frac{\frac{dF}{dt}}{\frac{d^2 F}{dt^2}} = - \frac{\rho}{\eta^2} \quad (5)$$

en que η es una constante de separación.

Tomando en cuenta la condición de borde (2), se obtiene

$$G(z) = A \operatorname{sen} \eta z \quad (6)$$

La función $F(t)$ debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{\rho}{\eta^2} \cdot \frac{d^2 F}{dt^2} + \xi \frac{dF}{dt} + \mu F = 0 \quad (7)$$

Llamaremos ξ_c al valor de ξ que separa las soluciones oscilatorias y las no oscilatorias de la ec. (7). Resulta

$$\xi_c = \frac{2\sqrt{\mu\rho}}{\eta} \quad (8)$$

La ecuación (3) da

$$\cos(\eta H) = 0 \quad (9)$$

Por lo tanto, η debe tomar uno de los valores η_j dados por

$$\eta_j = \frac{2j+1}{2H} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

De acuerdo con esto, los valores críticos de ξ serán los siguientes

$$(\xi_c)_j = \frac{2\sqrt{\mu\rho}}{\eta_j} = \frac{4H\sqrt{\mu\rho}}{(2j+1)\pi} \quad (11)$$

Entonces, si

$$(\xi_c)_{k+1} \leq \xi < (\xi_c)_k \tag{12}$$

los modos naturales correspondientes a $j=0,1,2,\dots,k$ serán oscilatorios, y los restantes, no-oscilatorios.

Definamos el grado de amortiguamiento o razón de amortiguamiento de la capa por la relación:

$$n = \frac{\xi}{(\xi_c)_0} = \frac{\pi \xi}{4 H \sqrt{\mu \rho'}} \tag{13}$$

2.- Factor de transmisión para una capa horizontal sobre un medio semi-infinito

Para evaluar el factor de transmisión, que se define más abajo oportunamente, basta considerar vibraciones sinusoidales. El resultado obtenido es de validez general, independientemente de la naturaleza del movimiento.

Por conveniencia, el eje Oz ha sido orientado hacia abajo, con el origen en la superficie libre (Fig. 2). El índice 1 se refiere a la capa superior de altura H; el índice 2 corresponde al medio semi-infinito sobre el cual reposa la capa. Se supone que los dos medios están soldados en el plano de contacto.

Las ecuaciones diferenciales de las vibraciones de corte en los medios 1 y 2 son, respectivamente:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \mu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \xi_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial z^2 \partial t} \tag{14}$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \mu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \xi_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial z^2 \partial t} \tag{15}$$

La solución debe satisfacer las siguientes condiciones de borde:

Para $z = 0$ $\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0$ (16)

Para $z = H$ $\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \xi_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + \xi_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial t} \\ \mu_1 = \mu_2 \end{array} \right.$ (17)

$\mu_1 = \mu_2$ (18)

Siguiendo a KANAI ¹⁰, consideramos un tren de ondas incidentes que se propaga verticalmente, representado por

$$u_0 = a e^{i(pt + f_2 z)} \tag{19}$$

Si u_1 y u_2 son los corrimientos en los medios 1 y 2 que resultan de la reflexión en la superficie libre y de la transmisión y reflexión en el plano $z=H$, se puede escribir

$$u_1 = B e^{i(pt+f_1 z)} + C e^{i(pt-f_1 z)} \quad (20)$$

$$u_2 = a e^{i(pt+f_2 z)} + A e^{i(pt-f_2 z)} \quad (21)$$

Para satisfacer las ecuaciones diferenciales (14) y (15), f_1 y f_2 deben tener los valores particulares que se dan a continuación

$$f_1^2 = \frac{\rho_1 p^2}{\mu_1 + i \xi_1 p} \quad f_2^2 = \frac{\rho_2 p^2}{\mu_2 + i \xi_2 p} \quad (22)$$

Las condiciones de borde exigen que se tenga

$$B = C = \frac{a e^{if_2 H}}{\cos f_1 H + \frac{i \rho_1 \xi_2}{\rho_2 f_1} \operatorname{sen} f_1 H} \quad (23)$$

Definamos un "factor de transmisión" Λ por la relación:

$$\Lambda = \frac{|(u_1)_{z=0}|}{|(u_0)_{z=H}|} \quad (24)$$

De (19), (20) y (23) se sigue que

$$\frac{(u_1)_{z=0}}{(u_0)_{z=H}} = \frac{2 B}{a e^{if_2 H}} = \frac{2}{\cos f_1 H + \frac{i \rho_1 \xi_2}{\rho_2 f_1} \operatorname{sen} f_1 H} \quad (25)$$

Para evaluar el denominador de la última expresión, pongamos

$$f_1 H = M_1 - i N_1 \quad (26)$$

Se tendrá, entonces,

$$M_1 = \frac{H p \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\mu_1^2 + \xi_1^2 p^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \xi_1^2 p^2}} \right\}} \quad (27)$$

$$N_1 = \frac{H p \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\mu_1^2 + \xi_1^2 p^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \xi_1^2 p^2}} \right\}} \quad (28)$$

Ahora bien, la velocidad de propagación en el medio 1 es

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}} \quad (29)$$

y, por lo tanto, el período fundamental para la capa estudiada en el párrafo 1) será

$$T_{0,1} = \frac{4H}{v_1} = 4H \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}} \quad (30)$$

y la frecuencia circular correspondiente tendrá la expresión

$$P_{0,1} = \frac{2\pi}{T_{0,1}} = \frac{\pi}{2H} \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}} \quad (31)$$

En las ecs. (30) y (31) el índice 0 se refiere al modo fundamental; el índice 1 representa el medio 1

De la ec. (13) obtenemos

$$\xi_1 = \frac{4Hn_1 \sqrt{\mu_1 \rho_1}}{\pi} \quad (32)$$

de donde

$$\frac{P_{0,1}^2 \xi_1^2}{\mu_1^2} = 4n_1^2 \quad (33)$$

Utilizando este resultado, las expresiones para M_1 y N_1 quedan como sigue

$$M_1 = \frac{\frac{\pi}{2} \frac{P}{P_{0,1}}}{\sqrt{1 + 4n_1^2 \frac{P^2}{P_{0,1}^2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 4n_1^2 \frac{P^2}{P_{0,1}^2}}} \right\}} \quad (34)$$

$$N_1 = \frac{\frac{\pi}{2} \frac{P}{P_{0,1}}}{\sqrt{1 + 4n_1^2 \frac{P^2}{P_{0,1}^2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4n_1^2 \frac{P^2}{P_{0,1}^2}}} \right\}} \quad (35)$$

Admitamos, para simplificar, que el amortiguamiento ξ_2 del medio semi-infinito es nulo. Obtenemos

$$M_2 = f_2 H = H p \sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}} = \frac{H p}{v_2} \quad (36)$$

$$N_2 = 0 \tag{37}$$

Introduciendo la notación

$$\phi + i \psi = \cos f_1 H + \frac{i\rho_1 f_2}{\rho_2 f_1} \operatorname{sen} f_1 H \tag{38}$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} \phi^2 + \psi^2 = & \operatorname{Senh}^2 N_1 + \cos^2 M_1 + \gamma^2 \sqrt{1 + 4n_1^2 \frac{P^2}{P_{o1}^2}} (\operatorname{Senh}^2 N_1 + \operatorname{sen}^2 M_1) \\ & + \frac{2\gamma}{\pi} \frac{P_{o1}}{P} \sqrt{1 + 4n_1^2 \frac{P^2}{P_{o1}^2}} (M_1 \operatorname{Senh} 2 N_1 - N_1 \operatorname{Senh} 2 M_1) \end{aligned} \tag{39}$$

en que

$$\gamma = \frac{\rho_1 v_1}{\rho_2 v_2} \tag{40}$$

La expresión final para el factor de transmisión es entonces

$$\Lambda = \frac{2}{\sqrt{\phi^2 + \psi^2}} \tag{41}$$

3.- Espectro de potencia para la aceleración en la superficie libre.

Aceptemos la siguiente hipótesis

$$|u_o|_{\text{máx}}^2 \cdot p^2 = K = \text{constante} \tag{42}$$

Esta suposición es equivalente a admitir que el espectro de potencia de las ondas incidentes (para las velocidades) es una constante; es decir que el tren de ondas incidentes es "blanco".

Esta hipótesis tiene alguna base empírica en los resultados obtenidos por KANAI¹⁷ et.al., al comparar registros de temblores reales obtenidos para un mismo temblor con instrumentos situados en la superficie libre y en la roca a 300 metros de profundidad.

Combinando (24) y (42) se obtiene

$$|(u_1)_{Z=0}|_{\text{máx.}}^2 \cdot p^2 = \Lambda^2 |(u_o)_{Z=H}|_{\text{máx.}}^2 \cdot p^2 = \Lambda^2 K \tag{43}$$

Resultado que equivale a afirmar que el espectro de potencia para las velocidades en la superficie libre es proporcional a $\Lambda^2 K$. Así, si se tiene

$$S_{\dot{u}}(p)_{Z=H} = \frac{B}{4} = \text{Constante} \tag{44}$$

entonces

$$S_{\ddot{u}}(p)_{z=0} = \frac{\Lambda^2 B}{4} = \frac{B}{\phi^2 + \psi^2} \tag{45}$$

y teniendo en cuenta que ⁹

$$S_{\ddot{u}}(p) = p^2 S_{\ddot{u}}(p) \tag{46}$$

el espectro de potencia para las aceleraciones en la superficie libre será

$$S_{\ddot{u}}(p)_{z=0} = \frac{p^2 B}{\phi^2 + \psi^2} = \frac{\frac{p^2}{P_{o1}^2}}{\phi^2 + \psi^2} B P_{o1}^2 \tag{47}$$

La expresión

$$\frac{\frac{p^2}{P_{o1}^2}}{\phi^2 + \psi^2} \tag{48}$$

ha sido calculada como función de $\frac{P}{P_{o1}}$, para distintos valores de los parámetros n_1 y γ . Algunos de los resultados obtenidos se dan en Figs. 3 y 4.

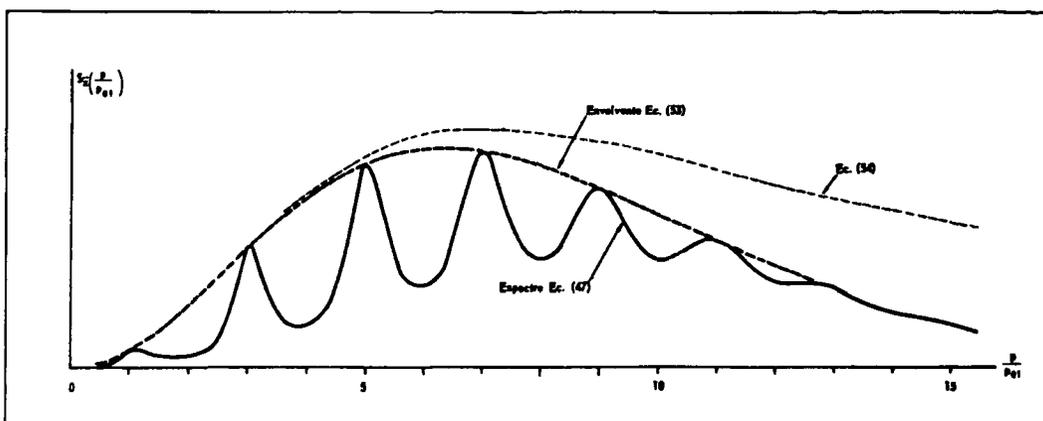


Fig. 3. Espectro de potencia de las aceleraciones en la superficie libre para $n=0,005$, $\gamma=0,4$.

Estos espectros teóricos ofrecen algunas de las características cualitativas encontradas en los espectros de potencia de acelerogramas de temblores reales⁹. Además, satisfacen la condición de que $S_{\ddot{u}}(p)$ es de orden p^2 en el origen, y, como se demostrará más adelante, que la potencia total es finita.

El número de puntas que aparece en el espectro de potencia teórico y el número de orden de la punta más alta, dependen de los valores de los parámetros n_1 y γ . Para valores pequeños de n_1 el número de puntas es grande; a la

inversa, para valores de n_1 relativamente grandes y valores pequeños de γ , los espectros de potencia teóricos contienen sólo una o dos puntas. Resulta, así, posible estimar los valores adecuados de n_1 y de γ , de modo que los espectros

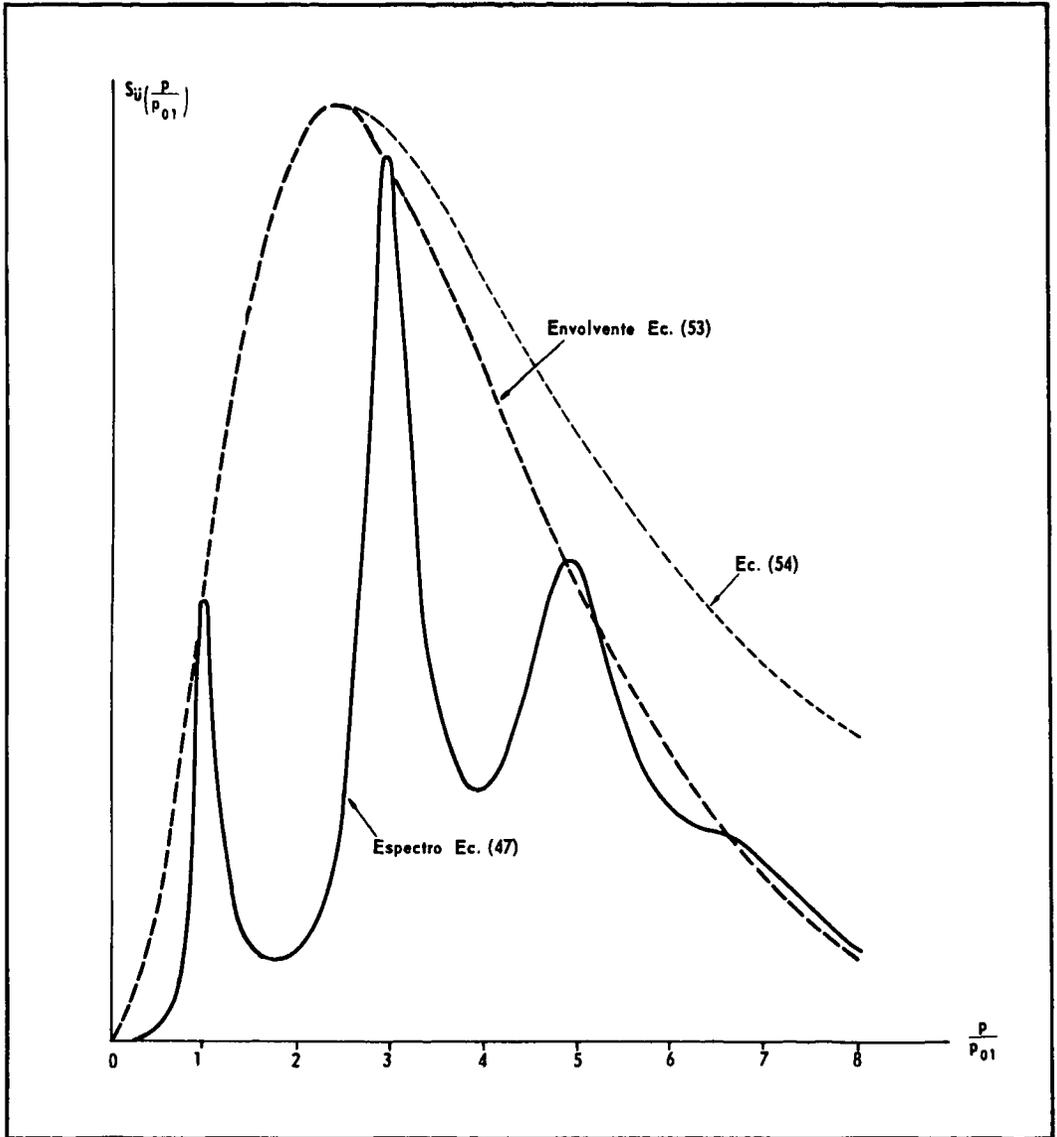


Fig. 4. Espectro de potencia de las aceleraciones en la superficie libre para $n=0,02$, $\gamma=0,2$.

teóricos calcen -al menos cualitativamente- con los espectros de potencia deducidos de acelerogramas de temblores reales obtenidos en cada localidad determinada.

4.- Envolvente del espectro de potencia para las aceleraciones en la superficie libre

Comparando los resultados del párrafo anterior con los obtenidos en⁹, se infiere que para lograr acuerdo con los espectros de potencia de acelerogramas reales, el parámetro n debe tener valores pequeños comparados con la unidad*. Pongamos, entonces,

$$n = \frac{\xi}{(\xi_c)_0} \ll 1 \tag{49}$$

es decir, admitamos que la constante de amortiguamiento de la capa superior es una fracción pequeña del amortiguamiento crítico del modo fundamental de dicha capa. Valen en tal hipótesis las siguientes relaciones aproximadas.

$$\left. \begin{aligned} M_1 &\approx \frac{\pi}{2} \frac{P}{P_0} \\ N_1 &\approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{P}{P_0}\right)^2 n \end{aligned} \right\} \tag{50}$$

Introduciendo estas expresiones en la ec. (39) obtenemos la siguiente aproximación.

$$\begin{aligned} \phi^2 + \psi^2 &\approx (1 + \gamma^2) \operatorname{Senh}^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{P}{P_0}\right)^2 n \right] + \gamma \operatorname{Senh} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{P}{P_0}\right)^2 n \right] \\ &+ \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{P}{P_0} \right) + \gamma^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{P}{P_0} \right) - \gamma n \frac{P}{P_0} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{P}{P_0} \right) \end{aligned} \tag{51}$$

Desde el punto de vista práctico, el proyectista de estructuras está interesado en los valores máximos del espectro de aceleraciones. Esto es, al proyectista le interesa conocer la envolvente superior del espectro.

El cálculo de los valores extremos de $\phi^2 + \psi^2$ implicaría un trabajo bastante tedioso. Se puede obtener una aproximación para la ecuación de la envolvente por el siguiente camino: en la ecuación (51) ponemos

$$\frac{P}{P_0} = 2k + 1 \quad k = \text{entero}$$

* En lo sucesivo omitimos el índice 1 en las expresiones en que aparecen $n_1, P_{01},$ etc.

en los términos oscilatorios solamente. Entonces

$$(\phi^2 + \psi^2)_{\text{env}} \approx \left\{ \text{Senh} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{P}{P_0} \right)^2 n \right] + \gamma \text{Cosh} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{P}{P_0} \right)^2 n \right] \right\}^2 \quad (52)$$

Se puede juzgar de la bondad de esta aproximación observando las Figs.3 y 4.

Finalmente se llega a la siguiente ecuación aproximada para la envolvente superior del espectro de potencia de las aceleraciones

$$S_{\ddot{u}}(p)_{Z=0, \text{env}} \approx \frac{\left(\frac{P}{P_0} \right)^2}{\left\{ \text{Senh} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{P}{P_0} \right)^2 n \right] + \gamma \text{Cosh} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{P}{P_0} \right)^2 n \right] \right\}^2} B P_0^2 \quad (53)$$

Desarrollando las funciones hiperbólicas que figuran en la ec. (53) en serie de potencias y conservando solamente el primer término en cada desarrollo, se obtiene la siguiente expresión aproximada

$$S_{\ddot{u}}(p)_{Z=0, \text{env}} \approx \frac{\left(\frac{P}{P_0} \right)^2}{\left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{P}{P_0} \right)^2 n + \gamma \right]^2} B P_0^2 \quad (54)$$

La curva de ec. (54) presenta un máximo para

$$\frac{P}{P_0} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi n}} \quad (55)$$

y la ordenada máxima es

$$S_{\ddot{u}, \text{env}, \text{máx}} = \frac{B P_0^2}{2 \pi n \gamma} \quad (56)$$

Como puede observarse en las Figs. 3 y 4, la envolvente de ec. (53) resulta bastante satisfactoria para todos los valores de $\frac{P}{P_0}$. En cambio, la envolvente de ec. (54) se separa notoriamente de las puntas del espectro de potencia para los valores de $\frac{P}{P_0}$ mayores que el dado por ec. (55). Sin embargo, el error cometido queda siempre por el lado de la seguridad y, como se verá más adelante, afecta sólo al diseño de estructuras de período propio pequeño; es decir, afecta aquella parte de los espectros de respuesta que está menos definida a causa de las limitaciones propias de los instrumentos de registro existentes en la actualidad.

5.- Propiedades estadísticas de los pseudo-temblores.

Llamaremos pseudo-temblor a un movimiento teórico del suelo que es estacionario en el sentido estadístico del término y cuyo espectro de potencia para las aceleraciones está dado por

$$S_{\ddot{u}}(p) = \frac{\frac{p^2}{p_0^2}}{\left\{ \text{Senh} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 n \right] + \gamma \text{Cosh} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 n \right] \right\}^2} B p_0^2 \quad (57)$$

en que p , n , γ y B son constantes. Es decir, atribuimos a los pseudo-temblores un espectro de potencia que coincide con la envolvente aproximada de ec. (53) desarrollada en el párrafo anterior, y además, la propiedad de ser procesos estacionarios.

Demostremos en seguida que este tipo de proceso posee una función de autocorrelación finita y que su espectro de potencia tiene momentos de todos los órdenes si las constantes n y γ son positivas.

La función de autocorrelación está dada por

$$\varphi_{\ddot{u}}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_{\ddot{u}}(p) \cos p r dp \quad (58)$$

Pongamos

$$x = \frac{p}{p_0} \sqrt{\pi n} \quad (59)$$

$$\alpha = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \quad (60)$$

Entonces

$$\varphi_{\ddot{u}}(r) = \frac{4 B p_0^3}{\pi^2 (1 + \gamma)^2 n \sqrt{\pi n}} \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x^2} \cos\left(\frac{p_0 r}{\sqrt{\pi n}} x\right)}{(1 - \alpha e^{-x^2})^2} dx \quad (61)$$

Desarrollando el denominador por el teorema del binomio e integrando término a término la serie que resulta, se obtiene el resultado siguiente:

$$\varphi_{\ddot{u}}(r) = \frac{B p_0^3}{\pi^2 (1 + \gamma)^2 n \sqrt{\pi n}} \sum_{k=1}^\infty \left\{ \frac{\alpha^{k-1}}{\sqrt{k}} e^{-\frac{p_0^2 r^2}{4 \pi n k}} \left(1 - \frac{p_0^2 r^2}{2 \pi n k} \right) \right\} \quad (62)$$

Esta expresión es finita para todo valor de r si n y γ son positivos. Lo mismo es válido para las derivadas de cualquier orden de $\gamma_{\ddot{u}}(r)$ con respecto a r .

La potencia total $P_{\ddot{u}}$ puede evaluarse teniendo en cuenta que

$$\varphi(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{\ddot{u}} dp \quad (63)$$

Luego,

$$P_{\ddot{u}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{u}} dp = 2 \int_0^{\infty} S_{\ddot{u}} dp = 2\pi \varphi(0) \quad (64)$$

o sea

$$P_{\ddot{u}} = \frac{2 B p_0^3}{\pi(1+\gamma)^2 n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-1}}{\sqrt{k}} \quad (65)$$

Expresión que es finita cuando n y γ son ambos positivos

Se puede demostrar que

$$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\ln \frac{1}{\alpha}}} - \frac{1}{2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-1}}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\ln \frac{1}{\alpha}}} + \frac{1}{2} \quad (66)$$

Ahora bien

$$\ln \frac{1}{\alpha} = \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \approx 2\gamma \quad (67)$$

Vale, entonces, la siguiente relación aproximada

$$P_{\ddot{u}} \approx \frac{2 B p_0^3}{n\sqrt{2\pi n \gamma}} = \pi \sqrt{2} B \sqrt{\rho_2 v_2} \frac{\rho_1 v_1^4}{\xi_1 H^{3/2}} \quad (68)$$

Se llega al mismo resultado si se calcula $P_{\ddot{u}}$ a partir de la expresión aproximada de $S_{\ddot{u},env}$ dada en ec. (54).

La relación (68) muestra que la velocidad de propagación en la capa superior tiene una influencia muy marcada sobre la potencia total.

Se pueden alcanzar conclusiones semejantes si partimos del espectro de potencia para las velocidades, definido por la relación

$$S_{\ddot{u}}(p) = \frac{1}{p^2} S_{\ddot{u}}(p) \quad (69)$$

en que $S_{\ddot{u}}(p)$ está dado por (57).

Se puede establecer que

$$\varphi_{\dot{u}}(\tau) = \frac{2B P_0 \sqrt{n}}{\pi (1+\gamma)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} \sqrt{k} e^{-\frac{P_0^2 \tau^2}{4\pi n k}} \quad (70)$$

y

$$P_{\dot{u}} = \frac{4 B P_0 \sqrt{n}}{(1+\gamma)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} \sqrt{k} \quad (71)$$

El espectro de potencia y la función de autocorrelación para las velocidades resulten finitos si n y γ son positivos.

Una vez conocida la función de autocorrelación, las propiedades más importantes del proceso pueden establecerse utilizando resultados conocidos de la teoría de los procesos estocásticos. No proseguiremos en este camino, porque nuestro propósito es justificar un modelo matemático de los temblores fuertes.

6.- Un modelo teórico para generar un ensemble de acelerogramas artificiales

Los pseudo-temblores tratados en el parágrafo 5) son series temporales estacionarias. Intentaremos en seguida construir un "ensemble" de series temporales no-estacionarias que satisfaga la siguiente condición: si la duración de un elemento cualquiera del "ensemble" tiende a infinito, las propiedades estadísticas del "ensemble" deben tender a las correspondientes propiedades encontradas para los pseudo-temblores. En particular el espectro de potencia y la función de autocorrelación, calculados como valores medios sobre el "ensemble" deben tender a las expresiones obtenidas en el parágrafo antes mencionado.

Estas condiciones pueden cumplirse calculando la aceleración en la superficie de la capa superior para un tren de ondas incidentes obtenido cortando un ruido blanco de modo que el tren incidente comience para $t = 0$ y termine para $t = T$. Si $T = \rightarrow \infty$, el espectro de potencia y la función de correlación tienden obviamente a las expresiones ya encontradas, dentro de las aproximaciones que hemos adoptado.

Este modelo es demasiado complicado para los propósitos de la práctica, porque implica la resolución de ecuaciones a derivadas parciales con condiciones de borde que dependen del tiempo.

Nos vemos conducidos, así, a proponer una simplificación radical que permita construir una teoría con la cual las aplicaciones prácticas resulten fáciles

de abordar. Reemplazaremos la capa superior por un oscilador o filtro formado por una masa ligada al medio semi-infinito mediante un resorte y un amortiguador dispuestos en serie, y aceptaremos que no hay retro-alimentación (feedback) entre el oscilador y su base.

Sean m , k , c la masa, la constante elástica y el coeficiente de amortiguamiento del oscilador, respectivamente. Sean x el desplazamiento absoluto de la masa, y el desplazamiento absoluto del punto de unión entre el resorte y el amortiguador, z el desplazamiento absoluto de la base (Ver Fig. 5). Las ecuaciones diferenciales del movimiento son

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= -c(\dot{x} - \dot{z}) \\ c(\dot{x} - \dot{z}) - k(z - y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

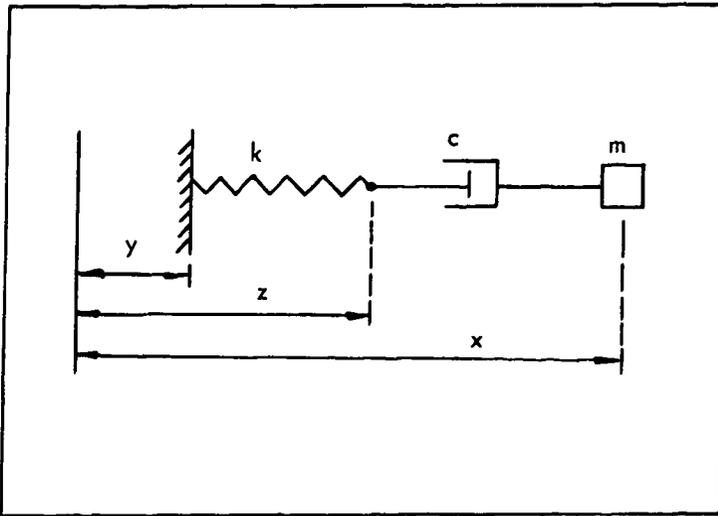


Fig. 5. Oscilador simple que representa a la estrata superior del suelo.

Eliminando z y \dot{z} se obtiene

$$m c \ddot{x} + k m \ddot{x} + k c \dot{x} = k c \dot{y} \quad (73)$$

El discriminante de la ec. característica es

$$\Delta = m^2 k^2 - 4 m k c^2 \quad (74)$$

Luego, el valor crítico del amortiguamiento es

$$c_c = \frac{1}{2} \sqrt{mk} \quad (75)$$

Introduzcamos la siguiente notación

$$\nu_g^2 = \frac{k}{m}$$

$$h_g = \frac{c}{c_c} = \frac{2c}{\sqrt{mk}} = \frac{2c}{m\nu_g} \tag{76}$$

$$\dot{x} = v$$

La ec. (73) se reduce a

$$\frac{\ddot{v}}{\nu_g^2} + \frac{2\dot{v}}{h_g \nu_g} + v = \dot{y}(t) \tag{77}$$

La función de transferencia de este filtro es

$$\phi(ip) = \frac{1}{\left(\frac{ip}{\nu_g}\right)^2 + \frac{2ip}{h_g \nu_g} + 1} \tag{78}$$

La respuesta percusional del filtro estará dada por

$$\left. \begin{aligned} k(t) &= \frac{\nu_g^2}{\alpha} e^{-\frac{\nu_g}{k} t} \text{ sen } \alpha t && , \text{ para } h_g > 1 \\ k(t) &= \frac{\nu_g^2}{\beta} e^{-\frac{\nu_g}{k} t} \text{ Senh } \beta t && , \text{ para } h_g > 1 \\ k(t) &= \nu_g^2 t e^{-\nu_g t} && , \text{ para } h = 1 \end{aligned} \right\} \tag{79}$$

en que

$$\alpha^2 = -\beta^2 = \nu_g^2 \left[1 - \frac{1}{h_g^2} \right] \tag{80}$$

Si suponemos que el espectro de potencia para la velocidad de la base es constante, es decir, si

$$S_{\dot{y}}(p) = \Lambda = \text{constante} \tag{81}$$

el espectro de potencia para $\dot{x}(t)$ será

$$S_{\dot{x}}(p) = A |\phi(ip)|^2 = \frac{A}{\left(1 - \frac{p^2}{\nu_g^2}\right)^2 + \frac{4p^2}{h_g^2 \nu_g^2}} \quad (82)$$

y el espectro de potencia para $\ddot{x}(t)$,

$$S_{\ddot{x}}(p) = \frac{A p^2}{\left(1 - \frac{p^2}{\nu_g^2}\right)^2 + \frac{4p^2}{h_g^2 \nu_g^2}} \quad (83)$$

La solución de la ecuación diferencial (77) es

$$v(t) = \dot{x}(t) = \begin{cases} \frac{\nu_g^2}{\alpha} \int_{-\infty}^t \dot{y}(\theta) e^{-\frac{\nu_g}{h_g}(t-\theta)} \operatorname{sen} \alpha(t-\theta) d\theta & , \text{ para } h_g > 1 \\ \frac{\nu_g^2}{\beta} \int_{-\infty}^t \dot{y}(\theta) e^{-\frac{\nu_g}{h_g}(t-\theta)} \operatorname{Senh} \beta(t-\theta) d\theta & , \text{ para } h_g < 1 \\ \nu_g^2 \int_{-\infty}^t \dot{y}(\theta) (t-\theta) e^{-\nu_g(t-\theta)} d\theta & , \text{ para } h = 1 \end{cases} \quad (84)$$

Si $\dot{y}(t)$ es un ruido blanco de duración infinita, obtenemos, en los tres casos, procesos estacionarios cuyos espectros de potencia para las velocidades y aceleraciones están dados por (82) y (83), respectivamente. Si $\dot{y}(t)$ es un segmento tomado de un ruido blanco, comenzando en el instante $t = 0$ y terminando en el instante $t = T$, de modo que $\dot{y}(t)$ sea nulo fuera del intervalo $(0, T)$, entonces las ecuaciones (84) representan procesos no estacionarios cuyas propiedades tenderán a las de los procesos estacionarios recién mencionados cuando $T \rightarrow \infty$. En particular, cuando $T \rightarrow \infty$, los espectros de potencia de velocidades y aceleraciones tenderán a los de ecs. (82) y (83).

En el caso particular $h_g = 1$, las ecuaciones (82) y (83) toman formas más simples.

$$S_{\dot{x}}(p) = \frac{A}{\left(1 + \frac{p^2}{\nu_g^2}\right)^2} \quad (h_g = 1) \quad (82)'$$

$$S_{\ddot{x}}(p) = \frac{A p^2}{\left(1 + \frac{p^2}{\nu_g^2}\right)^2} \quad (h_g = 1) \quad (83)'$$

Si comparamos (83)' con (54), vemos que estos dos espectros de potencia coinciden si se cumplen las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{B}{\gamma^2} \\ \nu_g^2 &= \frac{2\gamma}{\pi n} P_o^2 \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Obsérvese que ν_g es el valor de la frecuencia p deducido en ec. (55) para el cual la envolvente de ec. (54) presenta un máximo.

Se ve entonces que si representamos la capa superior del suelo por un oscilador lineal simple en que el resorte y el amortiguador están en serie y elegimos el amortiguamiento igual al crítico, obtenemos al filtrar un ruido blanco a través de este oscilador, una respuesta del oscilador cuyo espectro de potencia coincide con la aproximación deducida en el parágrafo 4) para la envolvente superior del espectro de potencia del movimiento de la superficie libre de una capa elástica horizontal, soldada sobre un medio elástico semi-infinito, y solicitada por un tren de ondas incidentes que constituya un ruido blanco.

Proponemos, entonces, como modelo matemático del movimiento del suelo en un temblor fuerte la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{\ddot{x}}{\nu_g^2} + \frac{2\dot{x}}{\nu_g} + \dot{y} = \dot{y}(t) \quad (86)$$

con las siguientes condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(0) = 0 \quad (87)$$

siendo $\dot{y}(t)$ un segmento de ruido blanco que comienza en el instante $t = 0$ y termina en el instante T .

La solución de (86) con estas condiciones de borde es

$$\dot{x}(t) = \nu_g^2 \int_0^t \dot{y}(\theta) (t-\theta) e^{-\nu_g(t-\theta)} d\theta \quad (88)$$

y la ecuación del acelerograma será

$$\ddot{x}(t) = \nu_g^2 \int_0^t \dot{y}(\theta) e^{-\nu_g(t-\theta)} \{1 - \nu_g(t-\theta)\} d\theta \quad (89)$$

El espectro de potencia del proceso definido en (88) está dado por (82)' y

el de (89) por (83)'.
 El modelo propuesto es suficientemente simple para que sea fácilmente utilizable por computadoras electrónicas sin demasiado trabajo. Se han hecho algunas pruebas y los acelerogramas artificiales obtenidos se asemejan a los a los temblores reales. Este punto lo estamos explorando con mayor detención para ver si los resultados son aceptables o si debiera introducirse alguna modificación en el modelo propuesto.

BOGDANOFF, GOLDBERG y BERNARD⁷ han propuesto un modelo en el cual el acelerograma es representado por una suma de ondas sinusoidales moduladas. Específicamente, el modelo propuesto por esos autores es el siguiente:

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0(t) + \ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t) + \dots$$

en que

$$\ddot{x}_0(t) = \begin{cases} \sum_1^n t a_j e^{-\alpha_j t} \cos(\omega_j t + \phi_j) & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$y \quad \ddot{x}_k(t) \quad \begin{cases} \sum_1^{nk} (t - \tau_k) l_j e^{-\beta_j(t - \tau_k)} \cos[\omega_j^{(k)}(t - \tau_k) + \phi_j^{(k)}], & t \geq \tau_k > 0 \\ 0, & t \leq \tau_k \end{cases}$$

Este modelo tiene algún parecido al propuesto aquí. Para mostrar las semejanzas bastaría descomponer $\ddot{y}(t)$ en una suma de ondas sinusoidales.

JENNINGS¹¹ ha propuesto un modelo similar al introducido en el presente trabajo, en el cual un segmento de ruido blanco es filtrado a través de un oscilador con resorte y amortiguador en paralelo. Cuando la duración de la señal de entrada (input) tiende a infinito, la respuesta del oscilador tiende a un proceso estacionario cuyo espectro de potencia es el propuesto por KANAI¹²; la potencia total tiende, entonces, a infinito.

7.- Espectros de respuesta de máxima aceleración para el diseño de estructuras lineales.

Sea S_a la ordenada del espectro de respuesta de máxima aceleración para

una estructura lineal de un grado de libertad fundada sobre la capa superior de suelo. Sea $S_{\ddot{u},env}$ la ordenada de la envolvente superior del espectro de potencia para las aceleraciones del suelo, en la superficie libre de dicha capa. Admitimos la siguiente hipótesis¹¹: S_a es proporcional a la raíz cuadrada de $S_{\ddot{u},env}$

$$S_a = C \sqrt{S_{\ddot{u},env}} \tag{90}$$

en que C es una constante

Entonces de la ec. (53) obtenemos para S_a la aproximación:

$$S_a = \frac{C \sqrt{B} p}{\text{Senh} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{p_s}{p_o} \right)^2 n \right] + \gamma \text{Cosh} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{p_s}{p_o} \right)^2 n \right]} \tag{91}$$

o bien, usando la aproximación de ec. (54)

$$S_a \approx \frac{C \sqrt{B} p_s}{\frac{\pi}{2} \left(\frac{p_s}{p_o} \right)^2 n + \gamma} \tag{92}$$

Ahora

$$p_s = \frac{2\pi}{T_s} \tag{93}$$

en que T_s es el período propio de la estructura; pongamos, además,

$$p_o = \frac{2\pi}{T_o} \tag{94}$$

Entonces, sustituyendo en (92):

$$S_a \approx \frac{2\pi C \sqrt{B}}{T_s \left[\frac{\pi n}{2} \frac{T_o^2}{T_s^2} + \gamma \right]} \tag{95}$$

Introduzcamos la notación

$$T_g = \sqrt{\frac{\pi n}{2\gamma}} T_o \tag{96}$$

se obtiene:

$$S_a = \frac{\pi C\sqrt{B}}{\gamma T_g} \frac{2 \frac{T_s}{T_g}}{1 + \left(\frac{T_s}{T_g}\right)^2} \quad (97)$$

Al mismo resultado se llega partiendo de (83)' y ocupando las relaciones (85), (90) y

$$T_g = \frac{2\pi}{\nu_g} \quad (98)$$

La ecuación (97) representa, entonces, el espectro de respuesta de máxima aceleración para una estructura lineal. En la Fig. 6 se ha representado este espectro en forma adimensional.

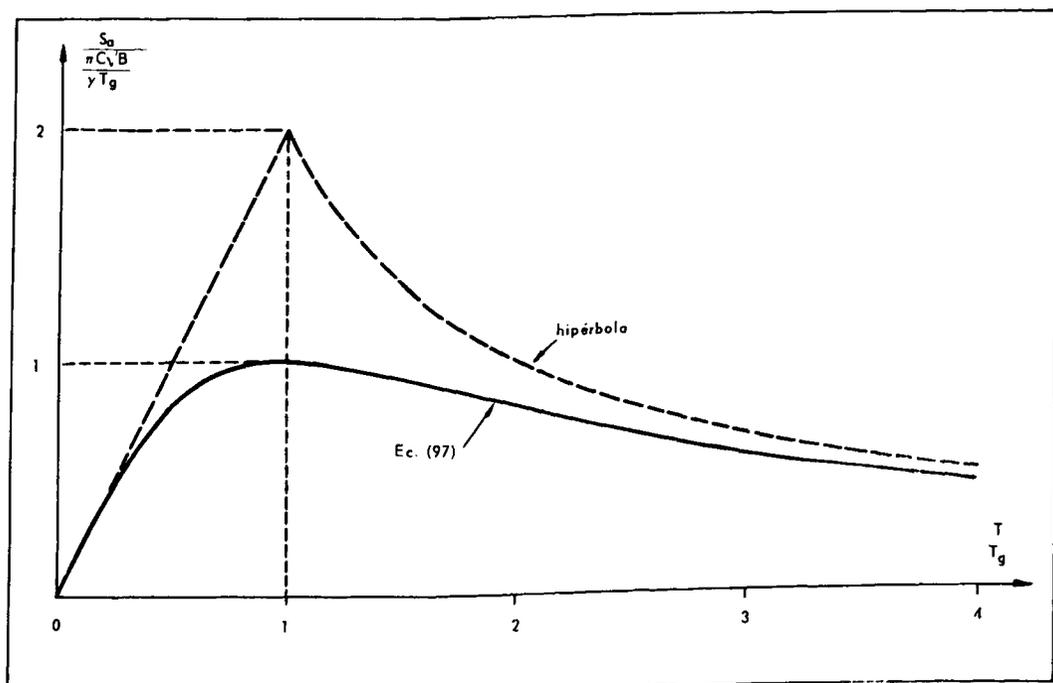


Fig. 6. Espectro de respuesta de aceleraciones de un oscilador lineal.

La ordenada máxima del espectro de respuesta ocurre para

$$T_{\text{máx.}} = T_g \quad (99)$$

y vale

$$(S_a)_{\text{máx.}} = \frac{\pi C\sqrt{B}}{\gamma T_g} \quad (100)$$

Ocupando la segunda de las ecs. (85) y los resultados de ecs (13), (31) se puede expresar el valor del período para el cual ocurre el máximo en función de las propiedades de la capa superior y del medio semi-infinito, como sigue

$$T_{\text{máx.}} = \frac{\pi \sqrt{2 H \xi_1 \sqrt{\mu_2 \rho_2}}}{\mu_1} \quad (101)$$

Se observa que los parámetros que influyen sobre la posición del punto de ordenada máxima son, en orden de importancia: la constante elástica μ_1 de la capa superior; el espesor H y la constante de amortiguamiento ξ_1 de dicha capa; la constante elástica μ_2 y la densidad ρ_2 del medio semi-infinito.

La ordenada máxima del espectro, expresada en función de las propiedades de la capa superior y del medio semi-infinito, está dada por

$$(S_a)_{\text{máx.}} = C \sqrt{B} \cdot \left(\frac{\mu_1}{2 H \xi_1 \rho_1} \right)^{1/2} (\rho_2 \mu_2)^{1/4} \quad (102)$$

De nuevo puede observarse que influyen más los parámetros relativos a la capa superior que los del medio semi-infinito.

La "constante" C depende del grado de amortiguamiento h_s de la estructura y de la duración del temblor comparada con el período propio de la estructura. Este efecto ha sido analizado por varios investigadores ^{1,12,13}. Un análisis de espectros de respuesta correspondiente a temblores reales ¹³ ha conducido a la siguiente fórmula empírica propuesta por primera vez por KANAI¹⁶:

$$\frac{(S_a)_{h_s}}{(S_a)_{h'_s}} = \left(\frac{h'_s}{h_s} \right)^{0,4}, \quad (103)$$

válida para grados de amortiguamiento mayores que 0,02, en que h_s y h'_s son los grados de amortiguamiento de dos estructuras. Para valores de h_s menores que 0,02, la duración del temblor tiene un efecto muy marcado y debe tenerse en cuenta. La ec. (103) compara los espectros de respuesta de un mismo temblor, en un mismo lugar, para dos estructuras lineales de diferente grado de amortiguamiento.

La constante B representa la densidad de potencia de las ondas incidentes; estará, entonces, relacionada con la sismicidad del lugar en que ocurre el temblor.

El resto de la expresión (102) se separa en dos factores que son

$$(\rho_2 \mu_2)^{1/4} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\mu_1}{2 H \xi_1 \rho_1} \right)^{1/2}$$

El primero tiene que ver sólo con las propiedades del medio semi-infinito sobre el cual reposa la capa superior. El segundo representa la influencia de la capa superior.

Tomando en cuenta la discusión anterior, la ecuación del espectro de aceleración de máxima respuesta se puede escribir en la forma

$$S_a = K_a \left(\frac{h'_s}{h_s} \right)^{0,4} \frac{2 \frac{T_s}{T_g}}{1 + \frac{T_s^2}{T_g^2}} \quad (104)$$

En la Fig. 7 se ha hecho una comparación entre este espectro teórico y los espectros medios de HOUSNER. Para la comparación se han fijado los siguientes valores para las constantes

$$K_a = 5 \frac{\text{pies}}{\text{seg.}^2}$$

$$T_g = 0,3 \text{ seg.}$$

$$h' = 0,10$$

Las curvas de línea llena que se prolongan hacia la izquierda por líneas de trazos corresponden a los espectros propuestos por HOUSNER.

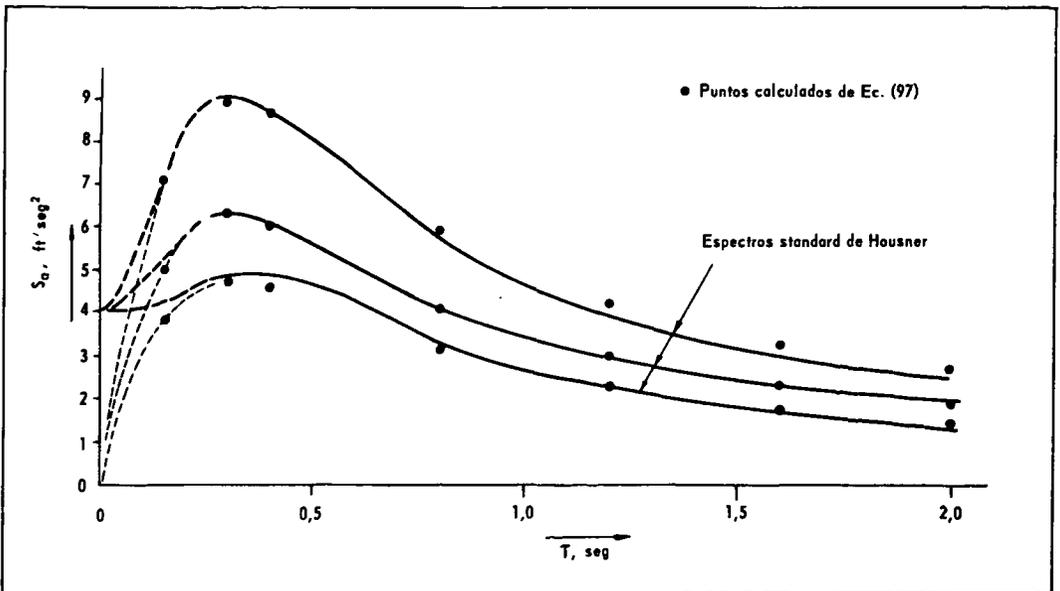


Fig. 7. Comparación de los espectros de Ec. (97) con los espectros standard de Housner.

Los puntos marcados con círculos negros han sido calculados de la ecuación (104).

Se puede apreciar que el acuerdo es bastante satisfactorio.

Supongamos una estructura de un grado de libertad representable por un os-

cilador lineal en que el resorte y el amortiguador están dispuestos en paralelo. Sean p_s la frecuencia circular del oscilador no amortiguado y T_s el período correspondiente. El espectro de potencia de las aceleraciones del oscilador será

$$S_{\ddot{x}}(p) = S_{\ddot{u}}(p) |\phi(ip)|^2 \tag{105}$$

en que $S_{\ddot{u}}(p)$ es el espectro de potencia de las aceleraciones del suelo y

$$|\phi(ip)|^2 = \frac{1 + 4h_s^2 \left(\frac{p}{p_s}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{p}{p_s}\right)^2\right]^2 + 4h_s^2 \left(\frac{p}{p_s}\right)^2} \tag{106}$$

siendo h_s el grado de amortiguamiento de la estructura

Para obtener la envolvente de $S_{\ddot{x}}(p)$ debemos sustituir $S_{\ddot{u}}(p)$ en ec. (105) por la expresión de $S_{\ddot{u}}(p)_{env}$ de ec. (53) y determinar el máximo de la función de p así obtenida. Resultará así una función de p_s , h_s y de los parámetros que aparecen en la expresión de $S_{\ddot{u}}(p)_{env}$. Hechas las operaciones descritas se llega a que, salvo para valores grandes de p_s , el máximo ocurre para $p=p_s$; de manera que con la mencionada salvedad.

$$S_{\ddot{x}}(p_s)_{env} = S_{\ddot{u}}(p_s) |\phi(ip_s)|^2 \tag{107}$$

siendo

$$|\phi(ip_s)|^2 = \frac{1 + 4h_s^2}{4h_s^2} \tag{108}$$

Si aceptamos que el espectro de respuesta para las aceleraciones del oscilador es proporcional a la raíz cuadrada del respectivo espectro de potencia tendremos la ec. (90) en que ahora C es un factor de proporcionalidad que, entre otras cosas, depende de h_s .

El raciocinio anterior justifica la omisión de $|\phi(ip)|$ en la expresión (90) del espectro de respuesta para las aceleraciones.

8.- Espectros de respuesta de estructuras lineales fundadas en diferentes tipos de suelo.

Definiremos la intensidad I de un temblor por la relación

$$I = \int_0^{\infty} S_v dp_s \tag{109}$$

en que S_v es el espectro de respuesta de velocidades de un oscilador simple. Entonces I será función del amortiguamiento h_s del oscilador.

Introduciendo la expresión del espectro de respuesta de velocidades

$$S_v(p_s) = \frac{C\sqrt{B}}{F(p_s, p_o, n, \gamma)} \quad (110)$$

en que

$$F(p_s, p_o, n, \gamma) = \text{Senh}\left(\frac{\pi n}{2} \frac{p_s^2}{p_o^2}\right) + \gamma \text{Cosh}\left(\frac{\pi n}{2} \frac{p_s^2}{p_o^2}\right) \quad (111)$$

se obtiene después de algunas operaciones sencillas

$$I = \frac{C p_o}{1 + \gamma} \sqrt{\frac{2B}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{2k+1}} \quad (112)$$

en que α tiene el significado definido en ec. (60)

De aquí resultan las siguientes expresiones de los espectros de respuesta

$$S_v(p_s) = I \sqrt{\frac{n\gamma}{2}} \frac{f(\gamma)}{p_o} \frac{1}{F(p_s, p_o, n, \gamma)} \quad (113)$$

$$S_a(p_s) = I \sqrt{\frac{n\gamma}{2}} f(\gamma) \frac{p}{p_o} \frac{1}{F(p_s, p_o, n, \gamma)} \quad (114)$$

en las cuales se ha puesto

$$f(\gamma) = \frac{1 + \gamma}{\sqrt{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{2k+1}}} \quad (115)$$

El máximo del espectro de aceleraciones ocurre aproximadamente para

$$p_s = \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi n}} p_o \quad (55')$$

y vale aproximadamente

$$S_{a, \text{máx}} \approx \frac{I}{2\sqrt{\pi}} f(\gamma) \quad (116)$$

La función $f(\gamma)$ expresa la influencia del suelo de fundación sobre el valor máximo de la ordenada del espectro de respuesta de aceleraciones, para una intensidad de temblor fija. Hemos tabulado la función $f(\gamma)$ para valores de la variable comprendidos entre 0 y 1. Se ha agregado una columna en la cual se ha tabulado la expresión $1 + \sqrt{\gamma}$. Se ve que puede ponerse, sin gran error,

$$f(\gamma) = 1 + \sqrt{\gamma} \tag{117}$$

γ	$f(\gamma)$	$1 + \sqrt{\gamma}$
0	1	1
$\frac{1}{18}$	1,23	1,238
$\frac{1}{9}$	1,34	1,333
$\frac{1}{5}$	1,43	1,447
$\frac{1}{3}$	1,55	1,577
$\frac{2}{3}$	1,80	1,817
1	2	2

Valores de $f(\gamma)$ y de $1 + \sqrt{\gamma}$ para γ comprendido entre 0 y 1.

En la práctica γ oscila entre valores relativamente estrechos; desde $\frac{1}{12}$, para suelos blandos, a $\frac{1}{3}$ para los suelos duros, de manera que a igual intensidad, la ordenada máxima del espectro de respuesta de aceleraciones en suelo blando es aproximadamente igual a 0,8 veces de la máxima para suelo duro.

Ocupando la aproximación introducida en ec. (54) y aprovechando la relación (96) se puede escribir el espectro de velocidades en la forma

$$S_v(T_s) = I \frac{1 + \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\pi}} \frac{T_g}{2\pi} \frac{T_s^2}{T_s^2 + T_g^2} \tag{118}$$

y el de aceleraciones

$$S_a(T_s) = I \frac{1 + \sqrt{\gamma}}{2\sqrt{\pi}} \frac{2 T_s T_g}{T_s^2 + T_g^2} \tag{119}$$

En la Fig. 8 se han dibujado dos espectros de respuesta de aceleraciones: uno para un suelo "duro", con $\gamma = \frac{1}{3}$, $T_g = 0,3$ seg, y otro para un suelo "blando" con $\gamma = \frac{1}{12}$ y $T_g = 1$ seg.

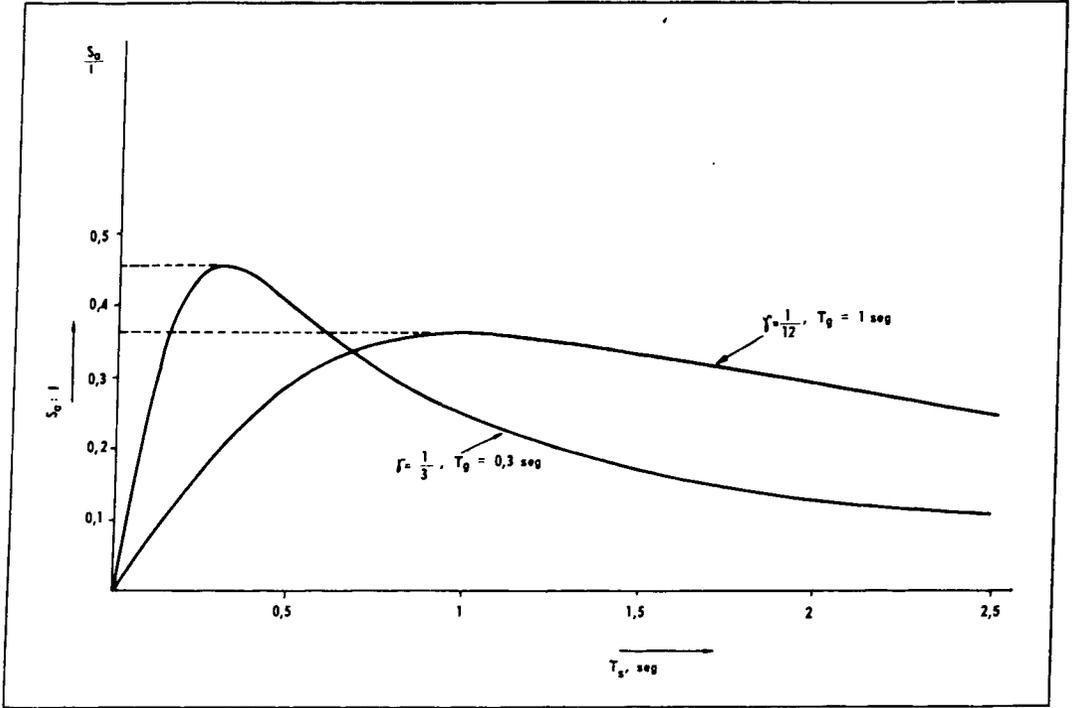


Fig. 8. Espectros de respuesta de aceleraciones para estructuras lineales fundadas sobre dos suelos diferentes, expresados como fracción de la intensidad I .

Finalmente comparando las expresiones (102), (104) y (116) y haciendo uso de la relación (117) se pueden expresar las intensidades I e I' en dos suelos distintos para un mismo temblor, es decir, para un mismo valor de la constante B , que según (44) es proporcional a la ordenada del espectro de potencia en el medio semi-infinito situado bajo la estrata de suelo superficial. Se obtiene después de algunas transformaciones la siguiente relación

$$\frac{I'}{I} = \frac{1+\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma'}} \left(\frac{v'}{v}\right)^{3/2} \left(\frac{H\rho'\gamma\xi}{H\rho\gamma'\xi'}\right)^{1/2} \quad (120)$$

CONCLUSIONES

- 1) El análisis de la respuesta de una capa homogénea de suelo de espesor constante, soldada sobre un medio semi-infinito en el cual se propaga un tren de ondas de corte puro conduce a establecer ecuaciones para los espectros de potencia de velocidades y aceleraciones en la superficie. Bajo la hipótesis de que el tren de ondas incidente es un ruido blanco (espectro de potencia de las velocidades constantes), los espectros de potencia en la superficie libre obtenidos de este análisis teórico ofrecen semejanzas cualitativas y cuantitativas notables con los espectros de potencia de temblores reales.
- 2) Es posible obtener expresiones sencillas para los envolventes de los espectros de potencia en la superficie libre. Estas expresiones sencillas coinciden con los espectros de potencia que resultan de filtrar un ruido blanco (espectro de potencia de velocidades constante) a través de un oscilador simple en que el resorte y el amortiguador estén dispuestos en paralelo. Es decir, se puede aproximar el comportamiento de la capa superficial por el de un sólido de Maxwell.
- 3) La conclusión anterior conduce a postular un modelo matemático del acelerograma consistente en el resultado de filtrar un ruido blanco de duración finita a través de un sólido de Maxwell. El modelo en cuestión ofrece similitudes notables con el propuesto por Bogdanoff, Goldberg y Bernard, que resultaría así justificado en parte sobre bases físicas.
- 4) La introducción del modelo matemático del acelerograma abre la posibilidad de realizar estudios estadísticos sobre el comportamiento de estructuras, lineales o no, sometidas a temblor, porque se dispone de un "ensemble" de procesos no estacionarios que plausiblemente posee características semejantes a las de los temblores reales.
- 5) A partir de los espectros de potencia obtenidos al estudiar la respuesta de una capa de suelo soldada sobre un medio semi-infinito es posible obtener ecuaciones para los espectros de respuesta de estructuras lineales. Los espectros de respuesta de aceleraciones a que se llega coinciden bastante bien con los espectros medios propuestos por Housner y que han sido deducidos por este autor un promedio de espectros de temblores reales. Este acuerdo es una comprobación satisfactoria de la teoría desarrollada en el presente trabajo.
- 6) Se introduce una definición de intensidad del temblor que permite expresar los espectros de respuesta en función de la intensidad y de parámetros característicos del suelo, y comparar las intensidades que han de esperarse en dos suelos distintos para un mismo temblor.

7) Las fórmulas establecidas para los espectros de potencia y de respuesta contienen parámetros relacionados con las características del suelo. Queda, entonces, echada la base teórica para establecer correlaciones racionales entre los espectros y las propiedades del suelo y se abre la posibilidad de prever los espectros sobre la base de experiencias en que se determinen dichas propiedades (mediciones de aceleraciones debidas a microtrepidaciones -microtemors-, exploración sísmica, sondajes, determinaciones de mecánica y dinámica de suelos).

NOTACION

A,B,C, : constantes

a : constante; como índice se refiere a aceleración

c : coeficiente de amortiguamiento de oscilador simple; como índice significa "crítico"

g : como índice se refiere al suelo

H : espesor de capa de suelo superficial

h : grado de amortiguamiento de oscilador

i : unidad imaginaria

j : número entero

K : constante

k : número entero, constante elástica de oscilador simple

m : masa de oscilador simple

n : grado de amortiguamiento del modo fundamental del suelo

P : potencia total

p : frecuencia circular

$S_{\ddot{u}}(\)$, $S_{\dot{u}}(\)$: densidad espectral de potencia

S_a : ordenada de espectro de respuesta de aceleraciones

S_v : ordenada de espectro de respuesta de velocidades

s : como índice, se refiere a la estructura

T : período

t : tiempo

u : corrimiento horizontal

v : velocidad, velocidad de propagación de ondas de corte puro

x : abscisa, variable auxiliar

\dot{x} : velocidad

\ddot{x} : aceleración

$\ddot{\ddot{x}}$: derivada de la aceleración

y : abscisa

z : coordenada vertical, abscisa

- α : parámetro relacionado con relación de impedancias γ (ec. 60)
 $\alpha; \beta$: parámetros (ec. 80)
 γ : relación de impedancias
 η : constante de separación (ec. 5)
 Λ : factor de transmisión (ec. 24)
 μ : constante elástica del suelo
 ν : frecuencia circular
 ξ : coeficiente de amortiguamiento del suelo
 ρ : densidad
 τ : variable temporal
 ϕ : función de transferencia
 φ : función de autocorrelación
- 0 : como índice, se refiere al modo fundamental
 1 : como índice, se refiere a la capa de suelo superior
 2 : como índice, se refiere al medio semi-infinito situado bajo la capa de suelo superior

B I B L I O G R A F I A

- 1.- HUDSON, D.E. "Response Spectrum Techniques in Engineering Seismology" World Conference on Earthquakes Engineering. Berkeley, California (junio 1956).
- 2.- ROSENBLUETH, E. "Some Applications of Probability Theory in Aseismic Design" World Conference on Earthquake Engineering. Berkeley, California (junio 1956).
- 3.- BYCROFT, G.N. "White Noise Representation of Earthquake" Proceedings Am. Soc. Civ. Eng., vol. 86, EM2 (abril 1960).
- 4.- HOUSNER, G.W. "Characteristics of Strong-Motion Earthquakes" Bull. Seism. Soc. Am., vol. 37, n° 1, (enero 1947).
- 5.- HOUSNER, G.W. "Properties of strong ground motion earthquakes" Bull. Seism. Soc. Am., vol. 45, (julio 1955).
- 6.- GOODMAN, L.E.; ROSENBLUETH, E. and NEWMARK, N.N. "Aseismic Design of Elastic Structures founded on firm ground" Proc. Am. Soc. Eng., vol. 79 (1953).
- 7.- BOGDANOFF, J.L.; GOLDBERG, J.E. and BERNARD, M.C. "Response of a simple structure to a random earthquake-type disturbance" Bull. Seism. Soc. Am., vol. 51, n° 2, (abril 1961).
- 8.- ARIAS, A. y PETIT-LAURENT, L. "Funciones de autocorrelación y densidades de potencia de acelerogramas de movimientos fuertes" Primeras Jornadas de Sismología e Ingeniería Antisísmica (Santiago, julio 1963). Revista del IDIEM, vol. 3, n° 3, (noviembre 1964)
- 9.- PETIT-LAURENT, L. "Análisis espectral de registros de sismos fuertes" Universidad de Chile. Memoria de título (1963).

- 10.- KANAI, K. "The requisite conditions for the predominant vibration of ground" Bull. Earthquake Research Institute, Tokyo XXXV (1957).
- 11.- JENNINGS, P.C. "Response of simple yielding structures to earthquake excitation" California Institute of Technology, Earthquake Research Laboratory (junio 1963).
- 12.- KANAI, K. "Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground" Bull. Earthquake Research Institute, Tokyo, vol. 35 (1957).
- 13.- ARIAS, A. y HUSID, R. "Influencia del amortiguamiento sobre la respuesta de estructuras sometidas a temblor" Revista del IDIEM, vol. 1, nº 3 (dic. 1962). Discusión por E. ROSENBLUETH y los autores ibid. vol. 3, nº 1 (marzo 1964).
- 14.- BOLOTIN, V.V. "Statistical Theory of the Aseismic Design of Structures" Second World Conference on Earthquake Engineering, vol. II, pp. 1365-1374 (1960).
- 15.- BARSTEIN, M.F. "Application of probability Methods for Design the effect of seismic forces on engineering structures". Second World Conference on Earthquake Engineering, vol. II, pp. 1467-1481 (1960).
- 16.- KAWASUMI, H. y KANAI, K. "Small amplitude vibration of actual buildings" World Conference on Earthquake Engineering. Berkeley, California, 1956.
- 17.- KANAI, K.; TANAKA, T. y YOSHIZAWA, Sh. "Comparative studies of earthquake motions on the ground and underground" Bull. Earthquake Research Institute, Tokyo, vol. 37 pp. 53-87.

A THEORETICAL MODEL OF STRONG-MOTION ACCELEROGRAMS

SUMMARY:

A study of the response of an horizontal homogeneous elastic layer of uniform depth welded to a semi-infinite elastic medium, subjected to a train of shear waves that propagates vertically, is taken as basis of a theoretical model of strong-motion earthquakes. This model consists in filtering a segment of white noise through a linear oscillator with spring and dashpot in series.

Power spectra for accelerations and velocities of these theoretical motions are given. Starting from these power spectra, a simple formula for maximum acceleration response spectra of one-degree-of-freedom linear structures can be obtained. These response spectra agree satisfactorily with the average response spectra obtained by HOUSNER from a study of real earthquakes.

A new definition of earthquake intensity is given. On the basis of this definition, response spectra of simple linear structures with different soil conditions can be compared.