LOS MÉTODOS DE INTEGRACION

POR

CÁRLOS WARGNY

PREÁMBULO

Con el objeto de facilitar el estudio del Cálculo Integral, he reunido en este artículo los diferentes métodos de integracion que mencionan los textos de Cálculo, i los he dispuesto siguiendo un órden sencillo i natural, principiando por las reglas mas elementales i aplicándolas a ejercicios adecuados.

Presentada de esta manera la Integracion, como una simple operacion aljebráica, el principiante no encontrará dificultad en elejir el método apropiado para integrar una diferencial dada, i habrá adquirido la práctica necesaria en las operaciones aljebráicas que sirven para trasformar las funciones.

En los seis primeros capítulos de este escrito, se dan a conocer los métodos de integracion i en los restantes, se integran las funciones, clasificadas convenientemente.

Los ejercicios que no son orijinales llevan el nombre del autor i el número de la pájina de la obra de donde han sido sacados.

Valparaiso, octubre 20 de 1905.

CÁRLOS WARGNY.

CAPÍTULO PRIMERO

Definiciones

1. *Integral*. En el Cálculo Integral, la funcion *primitiva*:

$$y=f(x) \tag{1}$$

es la *integral* de la diferencial.

$$dy=f'(x)\,dx. \tag{2}$$

2. *Integracion*. La integracion es la operacion inversa de la diferenciacion, i su objeto es encontrar la funcion primitiva cuando se da su diferencial.

3. *Signo de integracion*. La integracion se indica por medio del signo $\int$, que se llama *integral* i es análogo al signo *diferencial* d.

4. *Empleo del signo* $\int$. Para *indicar* la integracion de (2), se antepone el signo integral a los dos miembros:

$$\int dy = \int f'(x)\, dx; \tag{3}$$

i *efectuando* la integracion, debemos llegar a la funcion primitiva (1).

5. *Destruccion del signo* $\int$. La simple comparacion de (3) i (1), nos dice claramente que

$$\int dy = y; \tag{4}$$

i este resultado es evidente, porque, segun la definicion de este cálculo, *la integral de la diferencial de una funcion es la misma funcion.*

Deducimos de ésto que los signos $\int$ i d se destruyen cuando se encuentran inmediatos, como en la fórmula (4).

Conforme con lo anterior, tendremos que

$$\int dx = x;$$

i, en jeneral,

$$\int d\, f(x) = f(x).$$

6. *Integrales fundamentales.* Comparemos ahora los segundos miembros de (3) i (1):

$$\int f'(x)\, dx = f(x) \tag{5}$$

Aquí, para encontrar la funcion primitiva, hai que pasar de $\int f'(x)\, dx$ a $f(x)$; lo que se consigue *trasformando* la diferencial en espresiones simples o fundamentales, cuya integracion se sabe hacer.

7. *Integracion inmediata:* Estas integrales fundamentales se encuentran empleando la *integracion inmediata*, método que consiste en *invertir* las reglas de la diferenciacion.

8. *Trasformaciones.* Las trasformaciones que puede tener una diferencial compuesta, para convertirla en una o mas integrales fundamentales, son de cuatro clases, a saber:

I. Trasformaciones aljebráicas;

II. Descomposiciones;

III. Integracion por sustitucion;

IV. Integracion por partes.

Toda la dificultad que presenta el Cálculo Integral estriba en saber hacer estas trasformaciones, para lo cual se necesita principalmente práctica en el cálculo aljebráico.

9. *Elementos de una integral.*—De (3) i (4) sacamos:

$$y=\int f'(x)\,dx \tag{6}$$

En la integracion indicada del segundo miembro, se distingue la derivada primera $F'(x)$ de la diferencial dx de la variable independiente.

Esta derivada es una nueva funcion de x i es propiamente la funcion que hai que trasformar.

10. PRINCIPIO.—*Toda funcion tiene una integral.*—De lo que precede se desprende que el Cálculo Integral trata de la integracion de las funciones, sin tomar en cuenta si éstas son derivadas de otra funcion o nó; i admitiremos como evidente que toda funcion tiene una integral.

Segun este nuevo modo de considerar la integracion, escribiremos

$$\int f(x)\,dx=f(x)$$

11. *Sub-índice de la integral.*—En la integracion de las derivadas o funciones, se reemplaza el factor diferencial dx por el sub-índice x, que afecta al signo de integracion:

$$\int dx = \int_x 1 = x;$$

$$\int f(x)\, dx = \int_x f(x)$$

12. *Clasificacion de las funciones.*—Las funciones que hai que integrar, se clasifican, como en el Cálculo Diferencial, del modo siguiente:

Aljebráicas .... { Racionales: enteras o fraccionarias
{ Irracionales

Trascendentes.. { Esponenciales i logarítmicas
{ Trigonométricas i circulares

13. *Comprobacion.*—Se comprueba una integral, diferenciándola. Por ejemplo, siendo x la integral de dx; tendremos como comprobacion, $d\,(x) = dx$. Del mismo modo, si

$$\int f(x)\, dx = f(x) \therefore d\, f(x) = f'(x)\, dx;$$

o bien

$$d \int^x f(x) = f'(x)\, dx$$

14. *Constante de la integral.*—A toda integral de una funcion debe agregarse un término constante.

Si diferenciamos las dos funciones

$$y = x, \qquad y = x + c,$$

llegamos al mismo resultado,

$$dy = dx,$$

porque en la diferenciacion el término constante desaparece.

Es por esta razon que al integrar una diferencial, debemos agregar esta constante i escribir:

$$\int dx = x + c$$

Del mismo modo tendremos que

$$\int f'(x)\, dx = f(x) + c \qquad (7)$$

El valor de esta constante puede ser nulo como en el primer ejemplo, o diferente de cero, como en el segundo.

Podemos observar, por ser la constante c un valor indeterminado, que una funcion tiene un número infinito de integrales.

Mas adelante se verá que la constante de una integral se puede determinar entre ciertos límites.

15. *Integrales indefinidas i definidas.*—La fórmula (7) nos indica que la integracion de las funciones consta de dos partes: la primera tiene por objeto calcular la funcion primitiva, sin atender al valor de la constante; i en la segunda, se determina este valor.

El primer resultado llámase *integral indefinida*; i con el segundo, se obtiene la *integral definida*.

Comenzamos este estudio con el cálculo de las integrales indefinidas.

CAPITULO II

Integracion inmediata

16. *Regla del signo.*—La integral tiene el signo de la diferencial:

$$\int (\pm\, d\, x) = \pm\, x.$$

En efecto, la comprobacion nos da:

$$d\,(\pm\, x) = \pm\, d\, x.$$

Igualmente,

$$\int_x (\pm\, f\, x) = \pm\, f\,(x)$$

17. *Trasposicion del signo.*—El signo de la diferencial puede anteponerse al signo de integracion sin que varíe la integral:

$$\int (\pm\, d\, x) = \pm \int d\, x = \pm\, x.$$

La trasposicion del signo es una consecuencia evidente de la regla del signo. Tendremos asi que

$$\int (\pm f x) = \pm \int_x f(x).$$

18. *Regla del coeficiente.*—La integral tiene el mismo coeficiente de la diferencial:

$$\int (adx) = a x.$$

Lo que se comprueba fácilmente, si diferenciamos:

$$d(ax) = a d x.$$

Del mismo modo,

$$\int_x a f(x) = a f(x)$$

19. *Trasposicion del coeficiente.*—El coeficiente de la diferencial puede anteponerse al signo de integracion sin que varíe la operacion:

$$\int (a d x) = a \int d x = a x$$

Las reglas relativas a la integracion del signo i coeficiente de una diferencial son las inversas de la diferenciacion, porque siendo

$$d(\pm a x) = \pm a d x;$$

inversamente,

$$\int (\pm a\, d\, x) = \pm a \int d\, x = \pm a\, x.$$

En jeneral, de

$$d\, [\pm a\, f\, (x)] = \pm a\, f\, (x)\, d\, x,$$

se deduce:

$$\int [\pm a\, f\, (x)\, d\, x] = \pm a \int_x f\, (x).$$

Observando estas dos reglas, la integracion de $\pm a\, f\, (x)\, d\, x$ se reduce a la de $f\, (x)\, d\, x$.

20. *Introduccion de un nuevo coeficiente.*—La integral no varia cuando se introduce un coeficiente de la forma $1 = \frac{m}{m}$

Esta trasformacion de la integral puede hacerse de dos maneras diferentes:

$$\int dx = \int \frac{m}{} dx = m \int \frac{1}{m} dx = m. \frac{x}{m} = x$$

o bien,

$$= \frac{1}{m} \int m\, dx = \frac{1}{m}. mx = x$$

El objeto de esta operacion es completar una diferencial i es la mas sencilla de las trasformaciones aljebráicas.

Ejercicios

i. $\int_x 2 = \int 2\, dx = 2 \int dx = 2x.$

ii. $\int \frac{3}{4} dx = \frac{3}{4} \int dx = \frac{3}{4} x$

iii. $\int \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} \int dx = \frac{x}{a}$

iv. $\int \pm \sqrt{\frac{a}{b}} dx = \pm \sqrt{\frac{a}{b}} \int dx = \pm \sqrt{\frac{a}{b}} x = \pm \frac{1}{b} \sqrt{a\, b\, x}.$

v. $$\int \frac{a+b}{a-b} f'(x)\,dx = \frac{a+b}{a-b} f(x)$$

vi. $$\int_x \alpha(a, b) f'(x) = \alpha(a, b) f(x)$$

vii. $$\int_x \alpha(a, b) f(m, n, x) = \alpha(a, b) f(m, n, x).$$

21. *Regla del esponente.*—La integral de una potencia se obtiene aumentando el esponente en una unidad i dividiendo la nueva potencia por su índice:

$$\int_x x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Se encuentra sin dificultad que esta es la regla inversa de la diferenciacion de una potencia, como lo indica la comprobacion:

$$d\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} x^{n+1-1} dx = x^n dx$$

El esponente puede ser entero, negativo o fraccionario:

n es negativo:

$$\int_x x^{-n} = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} = \frac{x}{(1-n)\,x^n}.$$

De este modo se integran las funciones fraccionarias, porque

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}.$$

n es fraccionario:

$$\int_x x^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{n\,x^{\frac{1+n}{n}}}{1+n}$$

Esta transformacion se emplea en las funciones irracionales, porque

$$\sqrt{x} = {}^{\overline{n}}.$$

Débese tener presente ademas que

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \qquad \frac{1}{\sqrt{x^m}} = x^{-\frac{m}{2}}$$

Ejercicios

i. $\int x = \int x^{o} x = \frac{x^{o+1}}{0+1} = x$

ii. $\int_{x} 1 = \int dx = x$

iii. $\int_{x} x = x^{1+1} : (1+1) = \frac{1}{2} x^{2}$

iv. $\int_{x} x^{2} = \frac{1}{3} x^{3}$

v. $\int_{x} x^{n+1} = \frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{x^{2} x^{n}}{n+2}$

vi. $\int_{x} x^{n-1} = \frac{1}{n} x^{n}$

xii. $\int dy = x^{3} dx \therefore y = \frac{1}{4}$

viii. $\int_{x} \frac{1}{x^{2}} = \int_{x} x^{-2} = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-}}{-1} = -\frac{1}{x}$

ix. $\int_{x} \frac{1}{x^{n}} = \int x^{-n} dx = -\frac{1}{(n-1) x^{n-1}}$ (Williamson, 2)

x $\int_{x} \frac{1}{x^{n+1}} = \int x^{-n-1} dx = \frac{-1}{n x^{n}}$

(*Continuará*)