DIFERENCIAS E INTERPOLACIONES

PRINCIPIOS JENERALES

El objeto de una tabla matemática es el de permitir encontrar el valor de una funcion correspondiente a cualesquier valor del argumento variable. Siendo imposible tabular la funcion para todos los valores del argumento, tenemos que construir la tabla para ciertos valores especiales solamente. Por ejemplo, en las tablas de los senos i cosenos los valores de las funciones son dados para valores del argumento que difiere uno de otro en un minuto.

El procedimiento de hallar los valores de las funciones correspondientes a valores del argumento intermediario entre los que son dados se llama *«interpolacion»*.

En Astronomía con mucha frecuencia se hace uso de las interpolaciones, debiendo por tanto los astrónomos familiarizarse con estos cálculos.

Debemos hacer notar en primer lugar que, en verdad, ningun procedimiento de interpolacion puede ser aplicable a todos los casos que se presenten. Por el hecho de que:

al número 2 corresponda el logaritmo		0,30103
i al número 3	« «	0,47712

no estamos justificados para sacar cualesquiera conclusion respecto a los logaritmos de los números comprendidos entre

2 i 3. Por lo tanto, una o mas hipótesis será necesario siempre adoptar como base de cualesquier sistema de interpolacion. Las hipótesis que se adoptan siempre son estas dos:

1. *Que, suponiendo que el argumento varie uniformemente, la funcion variará de acuerdo con alguna lei regular.*

2. *Que esta lei debe ser estudiada en los valores de las funciones dados por la tabla.*

Estas hipótesis se aplican al procedimiento para formar las *«diferencias»*, cuya manera de hacerlo se verá en el ejemplo que sigue, aplicado a los logaritmos senos de los arcos comprendidos entre 20° i 30°:

TABLA A

Argumentos	Funciones	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}	f^{VII}	f^{VIII}	f^{IX}
		DIFERENCIAS								
log sen 20°	9.53405									
		+2028								
21°	9.55433		−103							
		+1925		+8						
22°	9.57358		−95		0					
		+1830		+8						
23°	9.59188		−87		0					
		+1743		+8						
24°	9.60931		−79		−4	−4				
		+1664		+4			+11			
25°	9.62595		−75		+3	+7		−25		
		+1589		+7			−14		+52	
26°	9.64184		−68		−4	−7		+27		−101
		+1521		+3			+13		−49	
27°	9.65705		−65		+2	+6		−22		
		+1456		+5			−9			
28°	9 67161		−60		−1	−3				
		+1396		+4						
29°	9.68557		−56							
		+1340								
30°	9.69897									

La columna f' nos da la diferencia entre cada dos valores consecutivos de las funciones. Estas diferencias se llaman *1.ª diferencias.*

La columna f'' nos da la diferencia entre cada dos primeras diferencias consecutivas. Estas se llaman *2.ª diferencias.*

Del mismo modo, los números de las columnas que siguen, una vez escritos, se llaman *3.as, 4.as diferencias*, etc....

Ahora, continuando el órden sucesivo de las diferencias veremos que ellas se hacen cada vez mas pequeñas o que converjen hácia cero, esto nos indica que los valores de las funciones siguen una lei regular i por lo tanto, la 1.ª hipótesis que hemos hecho es entónces aplicable.

A fin de poder aplicar la interpolacion debemos suponer entónces que los valores intermedios de la funcion siguen la misma lei. La verdad de esta presuncion debe ser confirmada de algun modo ántes que podamos interpolar con exactitud matemática, pero en la práctica debemos suponerla xacta a falta de una razon que nos demuestre lo contrario.

EFECTOS DE LOS ERRORES EN LOS VALORES DE LAS FUNCIONES

En la Tabla A se puede notar que si continuamos el órden de las diferencias mas allá de la 4.ª, empezarán a aumentar i a ser cada vez mas irregulares. Esto proviene de las imperfecciones de los logaritmos a causa de la omision de las decimales mas allá de la 5.ª cifra.

Al notarse que las diferencias empiezan a ser irregulares, podemos juzgar si esta irregularidad proviene de errores en los números orijinales, los que deben ser correjidos, o de pequeños errores que provienen necesariamente de la falta de decimales en los logaritmos.

La gran ventaja de las diferencias es que cualesquier error, aunque sea pequeño, en las cantidades diferenciadas, a menos que siga una lei regular, saltará a la vista por las diferencias. Para demostrar la razon de esto, investigaremos mas adelante qué efecto producen los errores en las funciones dadas sobre los órdenes sucesivos de las diferencias.

Estudiemos ahora el caso en que las funciones sigan una lei regular.

Sea, por ejemplo, $x = a^3$, es decir que: $x = f(a)$. Demos a *a* los valores sucesivos de 0 a 10, elevemos en seguida estos números a la 3.ª potencia i construyamos la tabla de las diferencias:

TABLA B.

	Funcion	Diferencias			
		f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
$a=0$	$a^3=0$				
		$+1$			
$a=1$	$a^3=1$		$+6$		
		$+7$		$+6$	
$a=2$	$a^3=8$		$+12$		0
		$+19$		$+6$	
$a=3$	$a^3=27$		$+18$		0
		$+37$		$+6$	
$a=4$	$a^3=64$		$+24$		0
		$+61$		$+6$	
$a=5$	$a^3=125$		$+30$		0
		$+91$		$+6$	
$a=6$	$a^3=216$		$+36$		0
		$+127$		$+6$	
$a=7$	$a^3=343$		$+42$		0
		$+169$		$+6$	
$a=8$	$a^3=512$		$+48$		0
		$+217$		$+6$	
$a=9$	$a^3=729$		$+54$		
		$+271$			
$a=10$	$a^3=1000$				

En la Tabla B las 3.as diferencias son constantes i las 4.as diferencias se reducen a 0 (cero), luego las funciones son exactas.

Estudiemos ahora con detencion las tablas de las diferencias para deducir en seguida las fórmulas de interpolacion.

Copiemos nuevamente la 1.a parte de la tabla A.

TABLA A

Argumento	Funcion	Diferencias			
		f'	f''	f'''	f^{IV}
Log. sen 20°	9.53405				
		+ 2028			
21°	9.55433		— 103		
		+ 1925		+ 8	
22°	9.57358		— 95		0
		+ 1830		+ 8	
23°	9.59188		— 87		0
		+ 1743			
24°	9.60931				— 4
					+ 3
					— 4
					+ 2
					— 1

Un atento exámen de estas diferencias nos permitirá encontrar para cualesquier argumento su valor, espresado en términos de las diferencias. Así, por ejemplo, el log sen de 23° = log sen 22° + f', lo que se puede tambien espresar de este otro modo:

$$f\,(a+nw)=f\,(a)+f'$$

Basándonos en esto, insertamos a continuacion una tabla què espresa, de una manera jeneral, las relaciones que guardan entre sí los términos de los órdenes sucesivos de las diferencias correspondientes a una funcion que varie siguiendo una lei regular.

TABLA C

		1.ª Di f.as	2.as Di f.as	3.as Di f.as
		f'	f''	f'''
$f(a)$				
$f(a+\ \ nw)=$	$f+f'$	$f'+f''$	$f''+f'''$	f'''
$f(a+2\,nw)=$	$f+2f'+f''$	$f'+2f''+f'''$	$f''+2f'''$	f'''
$f(a+3\,nw)=$	$f+3f'+3f''+f'''$	$f'+3f''+3f'''$	$f''+3f'''$	f'''
$f(a+4\,nw)=$	$f+4f'+6f''+4f'''$	$f'+4f''+6f'''$	$f''+4f'''$	f'''
$f(a+5\,nw)=$	$f+5f'+10f''+10f'''$	$f'+5f''+10f'''$	$f''+5f'''$	
$f(a+6\,nw)=$	$f+6f'+15f''+20f'''$	$f'+6f''+15f'''$		
$f(a+7\,nw)=$	$f+7f'+21f''+35f'''$			

Fácilmente se comprenderá la construccion de esta tabla. La suma de los términos unidos por las líneas diagonales producen los términos indicados por las líneas verticales. Asimismo, es fácil comprobar la exactitud de dichas espresiones en el ejemplo numérico de la Tabla B. En dicho ejemplo se vé que partiendo de las 3.as diferencias (f'''), que son constantes, se puede encontrar el valor de un número n de un órden cualquiera de las funciones.

Supongamos ahora que en las funciones orijinales hayamos cometido un pequeño error i para discutir el caso en la forma mas jeneral que se pueda presentar, imajinémonos que hayamos cometido un error de 0.5 en uno de los números, estando los otros correctamente, pues no es posible suponer que varios números esten equivocados. Construyendo la tabla de las diferencias obtendremos:

Funcion	Diferencias				
	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}
0		0		+0.5	
	0		+0.5		—2.5
0		+0.5		—2.0	
	+0.5		—1.5		+5.0
0.5		—1.0		+3.0	
	—0.5		+1.5		—5.0
0		+0.5		—2.0	
	0		—0.5		+2.5
0		0		+0.5	

En este caso, el valor máximo de la diferencia del órden n es: 1.5 en las 3.as diferencias; 3.0 en las de la 4.a; 5.0 en las de la 5.a, etc.....

Su espresion jeneral es:

$$\frac{1}{2} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-s+1)}{1.2.3\ldots\ldots s}$$

en que *n* es el órden de las diferencias i

$$s = \frac{n}{2} \text{ o } \frac{n-1}{2},$$

segun si *n* es par o impar. Así:

$$f^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}$$

i siendo

$$s = \frac{2}{2} = 1\ldots\ldots f^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2} \cdot\cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-s+1)}{1\ldots\ldots s}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2(1)\ldots\ldots(2-1+1)}{1\ldots\ldots 1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = 1$$

i siendo

$$s = \frac{3-1}{2} = 1 .. f^{\mathrm{III}} = \tfrac{1}{2} \times \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}{1.2\ldots\ldots s}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3(2)(1)\ldots\ldots(3-1+1)}{1.2\ldots\ldots 1} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = 1.5$$

i siendo

$$s = \frac{4}{2} = 2 . f^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-s+1)}{1.2.3\ldots\ldots s}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4(3)(2)(1)\ldots(4-2+1)}{1.2.3\ldots\ldots 2} = \frac{1}{2} \times \frac{4.3}{2} = 3$$

i siendo

$$s = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2\ldots$$

$$f^{v} = \frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-s+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots s}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5(4)(3)(2)(1)\ldots(5-2+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots 2} = \frac{1}{2} \times \frac{5.4}{2} = 5$$

Este es el caso jeneral, pero en la práctica las diferencias pueden resultar dos o tres veces mayores sin que esto implique forzosamente un error mayor de 0.5 en los números escritos.

Tenemos entónces la siguiente regla jeneral para juzgar si una série de números siguen verdaderamente una lei uniforme:

«*Diferenciemos las séries hasta alcanzar un órden de dife-*
« *rencias en que los signos + i — se alternen o sigan uno a*
« *otro irregularmente.*

«*Si ninguna de las diferencias de ese órden, espresada en*
« *unidades de la última cifra de los decimales, excede del*
« *límite.*

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-s+1)}{1.2.3\ldots\ldots s}$$

« *— esto es, del valor del mayor coeficiente binomio del órden*
« *n, — los números dados se consideran que siguen una lei*
« *regular, i por lo tanto que son exactos dentro de una unidad*
« *de la última cifra.*

«*Si algunas diferencias exceden de este límite, su cuociente*
« *multiplicado por el coeficiente binomio de mas arriba, debe*
« *considerarse que indica el error máximo de que probable-*
« *mente está afectado el número opuesto.*»

De esa manera podremos, con gran seguridad, encontrar un error aislado en una série de números. Supongamos, por ejemplo, un error de dos unidades en alguno de los números de la série que sigue:

Funcion	Diferencias				
	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}
0					
	0		0		
0		0		+2	
	0		+2		—10
0		+2		—8	
	+2		—6		+20
2		—4		+12	
	—2		+6		—20
0		+2		—8	
	0		—2		+10
0		0		+2	
	0		0		
0					

Construyendo la tabla de las diferencias encontraremos que las 4 mayores diferencias del órden 5.º serán: — 10, + 20, —20, + 10, lo que nos permitirá encontrar al momento el número erróneo i juzgar de la magnitud de su error. Un error cerca del principio o fin de la série de los números, cuyas diferencias han sido calculadas, no puede ser descubierto por las diferencias a ménos que sea mui considerable.

Si, por ejemplo, el primero o último número está equivocado en una unidad, el error en cada órden de las diferencias será solo 1, como fácilmente se puede ver en el ejemplo que sigue:

FUNCION	DIFERENCIAS			
	f^{I}	f^{II}	f^{III}	
1				
	—1			
0		+1		etc...
	0		—1	
0		0		

Es solamente en aquellas diferencias que están en o cerca de la misma línea que los números crecen en la forma que hemos indicado mas arriba. Pero al principio i fin de las séries no podemos determinar esas desigualdades.

Examinando las diversas tablas de diferencias, que hemos indicado, vemos que n números tienen $n - 1$ primeras diferencias, $n - 2$ segundas diferencias i así sucesivamente, disminuyendo el número en 1 unidad con cada órden sucesivo. Por ejemplo, una série de 7 números tendrá 6 primeras diferencias, 5 segundas diferencias, 4 terceras diferencias, etc., etc. Por lo tanto, si el número de funciones dadas no excede del índice que espresa el órden de diferencias que se deban formar, no se podrá obtener ninguna conclusion.

Lo que se ha dicho aquí sobre la exactitud de los números, cuando las diferencias siguen una lei regular, debe entenderse como aplicable a errores aislados solamente. Si todos los números estuvieran sometidos a un error que siguiese una lei regular, este error no seria descubierto por las diferencias, porque, por la naturaleza misma del caso, las últimas solo indican desviaciones de alguna lei regular.

FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE INTERPOLACION

Fórmula de Newton

Elijamos una série de números cuyas diversas diferencias aparezcan como en el cuadro que sigue, el cual contiene una seleccion de séries que preceden i siguen a una de ellas:

TABLA D

ARGUMENTO	FUNCION	DIFERENCIAS f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}
$a - 3\,nw$	$f\,(a - 3\,nw)$					
		$f^{I}\left(a - \frac{5}{2}\right)$				
$a - 2\,nw$	$f\,(a - 2\,nw)$		$f^{II}\,(a - 2)$			
		$f^{I}\left(a - \frac{3}{2}\right)$		$f^{III}\left(a - \frac{3}{2}\right)$		$f^{V}\left(a - \frac{3}{2}\right)$
$a - nw$	$f\,(a - nw)$		$f^{II}\,(a - 1)$		$f^{IV}\,(a - 1)$	
		$f^{I}\left(a - \frac{1}{2}\right)$		$f^{III}\left(a - \frac{1}{2}\right)$		$f^{V}\left(a - \frac{1}{2}\right)$
a	$f\,(a)$		$f^{II}\,(a)$		$f^{IV}\,(a)$	
		$f^{I}\left(a + \frac{1}{2}\right)$		$f^{III}\left(a + \frac{1}{2}\right)$		$f^{V}\left(a + \frac{1}{2}\right)$
$a + nw$	$f\,(a + nw)$		$f^{II}\,(a + 1)$		$f^{IV}\,(a + 1)$	
		$f^{I}\left(a + \frac{3}{2}\right)$		$f^{III}\left(a + \frac{3}{2}\right)$		$f^{V}\left(a + \frac{3}{2}\right)$
$a + 2\,nw$	$f\,(a + 2\,nw)$		$f^{II}\,(a + 2)$		$f^{IV}\,(a + 2)$	
		$f^{I}\left(a + \frac{5}{2}\right)$		$f^{III}\left(a + \frac{5}{2}\right)$		$f^{V}\left(a + \frac{5}{2}\right)$
$a + 3\,nw$	$f\,(a + 3\,nw)$					

En esta tabla se puede ver que todas las diferencias, cuyos términos son equivalentes, se encuentran colocadas sobre una misma línea horizontal. Esto sirve para indicar en qué línea cae una diferencia de cualquier órden.

Así, todos los términos (a + 2) están en una misma línea horizontal i los términos $\left(a + \frac{5}{2}\right)$ se encuentran media línea mas abajo.

Las diferencias que siguen dan una idea clara de la forma como se construyen todas las diferencias de la tabla anterior:

$$f(a-2\,nw)-f(a-3nw)=f^{I}\left(a-\frac{5}{2}\,nw\right)=f^{I}\left(a-\frac{5}{2}\right)$$

$$f(a+(n+1)\,w-f(a+nw)=f^{I}\left(a+\left(n+\frac{1}{2}\right)w\right)$$

$$f^{I}\left(a+\left(n+\frac{1}{2}\right)w-f^{I}\left(a+\left(n-\frac{1}{2}\right)w=\right.\right.$$

$$f^{II}(a+nw)=f^{II}(a+1)$$

Trazando en la Tabla D, a partir de la funcion orijinal, una línea diagonal descendente, obtendremos todas las diferencias que se emplean en la fórmula de interpolacion de Newton, cuya espresion jeneral es la siguiente:

$$f(a+nw)=f(a)+n\,f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{n\,(n-1)}{2}$$

$$f^{II}(a+1)+\frac{n(n-1\ (n-2)}{1.2.3}f^{III}\left(a+\frac{3}{2}\right)+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} f^{IV}(a+2) + \ldots.$$

En algunos testos alemanes los coeficientes binomios:

$$\frac{n(n-1)}{1.2}; \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

se representan de esta otra manera:

$$\left(\frac{n}{2}\right); \left(\frac{n}{3}\right)$$

Entónces, la fórmula de Newton se puede espresar tambien de este modo:

$$f(a+nw) = f(a) + nf^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)f^{II}(a+1) +$$

$$\left(\frac{n}{3}\right)f^{III}\left(a+\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)f^{IV}(a+2) +$$

$$\left(\frac{n}{5}\right)f^{V}\left(a+\frac{5}{2}\right) + \ldots.$$

Aplicaciones de la fórmula de interpolacion de Newton

Supongamos que se hayan calculado las coordenadas de un cometa para las fechas que se espresan a continuacion: Julio 23, Julio 27, Julio 31 i Agosto 4 i deseamos conocer sus coordenadas exactas para Julio 24.

Construyamos la Tabla de las diferencias:

		Fechas (Argtos.)	Declinacion del cometa	DIFERENCIAS f^{I}	DIFERENCIAS f^{II}	DIFERENCIAS f^{III}
(dif argtos)	$= w = 4 \ldots$	Julio 23........	+ 25° 33'			
				+ 1° 41',5		
		id. 27... ...	+ 27° 14',5		+ 2',9	
				+ 1° 44',4		— 0',4
	$nw = 1 \ldots\ldots$	id. 31... ...	+ 28° 58',9		+ 2',5	
				+ 1° 46',9		
	$n = \frac{nw}{w} = \frac{1}{4}$	Agosto 4.......	+ 30° 45',8			

Fijándonos en esta tabla, en la Tabla D de las diferencias i aplicando la fórmula de Newton obtendremos los siguientes valores:

$$\left.\begin{array}{r} f\,(a) = 25^{o}33' \\ n \overset{I}{f}\left(a+\frac{1}{2}\right) = 1^{o}41',5 \times \frac{1}{4} = +25.37 \\ \frac{n\,(n-1)}{2}\overset{II}{f}(a+1) = -\frac{3}{32} \times 2',9 = -0.28 \\ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\overset{III}{f}\left(a+\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{128} \times -0'',4 = -0.22 \\ \hline \delta = +25^{o}\,57',87 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{\frac{1}{4} \times -\frac{3}{4}}{2} = -\frac{3}{32} \\ \\ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3} = \frac{\frac{1}{4} \times -\frac{3}{4} \times -\frac{7}{4}}{6} = \frac{21}{384} = \frac{7}{128} \end{array}$$

Luego la declinacion del cometa para Julio 24 es $= +25^{o}\,57',87$.

Trasformacion de la fórmula de Newton

Escribamos nuevamente la fórmula de Newton ya conocida:

$$f(a+n\text{w}) = f(a) + n\overset{I}{f}\left(a+\frac{1}{2}\right) + \frac{n\,(n-1)}{2}\overset{II}{f}(a+1) + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\overset{III}{f}\left(a+\frac{3}{2}\right)$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.2.3.4}\overset{IV}{f}(a+2) + \dots$$

A esta fórmula se le puede dar una sencilla trasformacion sacando a *n* como factor comun en los diversos términos del 2.º miembro, i entónces la fórmula se trasformará en esta otra:

$$f(a+nw)=f(a)+n\left\{\overset{\mathrm{I}}{f}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{n-1}{2}\left\{\overset{\mathrm{II}}{f}(a+1)+\frac{n-2}{3}\left\{\overset{\mathrm{III}}{f}\left(a+\frac{3}{2}\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.+\frac{n-3}{4}\left\{\overset{\mathrm{IV}}{f}(a+2)+\frac{n-4}{5}\overset{\mathrm{V}}{f}\left(a+\frac{5}{2}\right)\right)\right\}$$

Ejercicio

P. ¿Con esta última fórmula de Newton hallar el log. seno de 20° 24'?
Primeramente construyamos la tabla de las diferencias:

	Funcion	DIFERENCIAS				
		f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	
log sen 20°..	9.53405					$w = 1° = 60'$
		+2028				
» 21°..	9.55433		−103			$nw = 24'$
		+1925		+8		
» 22°..	9.57358		−95		0	$n = \frac{nw}{w} = \frac{24'}{60'} = 0',4$
		+1830		+8		
» 23°..	9.59188		−87			
		+1743				
» 24°..	9.60931					

Escribamos nuevamente la fórmula de Newton trasformada, solo hasta el 3.^{er} término, aplicándole el valor de *n:*

$$f(a + 0',4w) = f(a) + 0',4 \left\{ f^{I}\left(a + \frac{1}{2} \right) \right.$$

$$+ \frac{0',4-1}{2} \left\{ f^{II} (a+1) + \frac{0',4-2}{3} \left\{ f^{III} \left(a + \frac{3}{2} \right) + \ldots \right.\right.$$

$$\text{———} = f(a) + 0',4 \left\{ f^{I} \left(a + \frac{1}{2} \right) \right.$$

$$-0',3 \left\{ f^{II} (a+1) - 0,533 \left\{ f^{III} \left(a + \frac{3}{2} \right) + \ldots \right.\right.$$

Ahora, apliquemos a esta última fórmula los términos de las diferencias comprendidos en la línea diagonal descendente de la tabla de arriba i obtendremos:

$$\text{———} = 9,53405 + 0',4 \left\{ \begin{matrix} 2028 \\ 824 \end{matrix} \right. - 0,3 \left\{ \begin{matrix} 103 - 0.533 \times 8 \\ -4.27 \end{matrix} \right.$$

log sen 20°24' = 9.54229

$$+32.18 \left\{ \begin{matrix} 107.27 \\ \end{matrix} \right.$$

$$824,07 \left\{ \begin{matrix} 2060,18 \\ \end{matrix} \right.$$

«De esta manera, por medio de la fórmula de interpola-
« cion de Newton, se pueden encontrar los logaritmos inter-
« mediarios de aquellos que se dan en las tablas i este es el
« procedimiento empleádo para construir las Tablas de lo-
« garitmos que todos conocemos i de las cuales hacemos
« tanto uso en nuestros cálculos».

Fórmula de interpolacion de Gauss

Mirando con atencion la Tabla D i relacionándola con alguna de las tablas de diferencias numéricas que hemos dado, veremos que las diferencias que usa Newton en su fórmula tienen las siguientes equivalencias:

$$f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

$$f^{\mathrm{II}}(a+1)=f^{\mathrm{II}}(a)+f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

$$f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{3}{2}\right)=f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+f^{\mathrm{IV}}(a)$$

$$f^{\mathrm{IV}}(a+2)=f^{\mathrm{IV}}(a+1)+f^{\mathrm{V}}\left(a+\frac{3}{2}\right)=f^{\mathrm{IV}}(a)+f^{\mathrm{V}}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

$$+f^{\mathrm{V}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+f^{\mathrm{VI}}(a+1)=f^{\mathrm{IV}}(a)+2\,f^{\mathrm{V}}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

Con un ejemplo numérico cualquiera, es mui fácil comprobar que estas fórmulas son enteramente exactas.

A las diferencias que resultan, corresponderán asimismo los siguientes coeficientes binomios:

Para $f'\left(a+\frac{1}{2}\right)$ corresponderá ..... n

Id. $f''(a)$ id. $\frac{n.n-1}{2}$

Id. $f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)$ id. $\frac{n\,(n-1)}{1.2}+\frac{n\,(n-1)\,(n-1)}{1.2.3}$

i sacando factor comun a

$$\frac{n\,(n-1)}{1.2.3}$$

despues de haber multiplicado por 3 el numerador i denominador de la primera fraccion, obtendremos:

Para $f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)$ corresponderá....

$$\frac{n\,(n-1)}{1.2.3}\left\{3+n-2\right\}=\frac{(n+1)\,n\,(n-1}{1.2.3}$$

Id. $f^{IV}(a)$ corresponderá $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$

i sacando factor comun a

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}$$

despues de haber multiplicado por 4 el numerador i denominador de la primera fraccion, obtendremos:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}\left\{4+n-3\right\} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}$$

Luego la fórmula que resulta, agrupando las diferencias con sus respectivos coeficientes binomios, conocida con el nombre de «Fórmula de Gauss», se representa de esta manera:

$$f(a+nw)=f(a)+n\,f'\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{2}f''(a)$$

$$+\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1.2.3}f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}f^{IV}(a)$$

$$+\frac{(n+2)(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

Reproduciendo la tabla D veremos que las diferencias empleadas por Gauss, siguen una línea zig zag que baja i sube:

Tabla D

Funcion	Diferencias				
	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
$f\,(a-3\,nw)$					
	$f'\left(a-\frac{5}{2}\right)$				
$f\,(a-2\,nw)$		$f''\,(a-2)$			
	$f'\left(a-\frac{3}{2}\right)$		$f'''\left(a-\frac{3}{2}\right)$		
$f\,(a-nw)$		$f''\,(a-1)$		$f^{IV}\,(a-1)$	
	$f'\left(a-\frac{1}{2}\right)$		$f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)$		$f^{V}\left(a-\frac{1}{2}\right)$
$f\,(a)$		$f''\,(a)$		$f^{IV}\,(a)$	
	$f'\left(a+\frac{1}{2}\right)$		$f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)$		$f^{V}\left(a+\frac{1}{2}\right)$
$f\,(a+nw)$		$f''\,(a+1)$		$f^{IV}\,(a+1)$	
	$f'\left(a+\frac{3}{2}\right)$		$f'''\left(a+\frac{3}{2}\right)$		$f^{V}\left(a+\frac{3}{2}\right)$
$f\,(a+2\,nw)$		$f''\,(a+2)$		$f^{IV}\,(a+2)$	
	$f'\left(a+\frac{5}{2}\right)$		$f'''\left(a+\frac{5}{2}\right)$		$f^{V}\left(a+\frac{5}{2}\right)$
$f\,(a+3\,nw)$					

Tomemos ahora de esta misma tabla las diferencias que se encuentran en una misma línea horizontal i coloquemos al lado de ellas sus diferencias equivalentes.

Entónces obtendremos:

$$f'\left(a+\frac{1}{2}\right)=f'\left(a-\frac{1}{2}\right)+f''(a)$$

$$f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)=f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)+f^{IV}(a)$$

A estas nuevas diferencias corresponderán tambien los siguientes coeficientes binomios:

A $f'\left(a-\frac{1}{2}\right)$ corresponderá.... n

» $f''(a)$ » $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n}{2}(2+n-1)=n\,\frac{(n+1)}{2}$

» $f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)$ » $\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1.2.3}$

» $f^{IV}(a)$ » $\frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)}{1.2.3.4}$

Ahora, agrupando estas diferencias con sus respectivos coeficientes binomios obtendremos la 2.ª Fórmula de Gauss, cuya espresion jeneral es la que sigue:

$$f(a+nw)=f(a)+n\,f'\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{(n+1)\,n}{2}f''(a)$$
$$+\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1.2.3}f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{(n+2)(n+1)\,n\,(n-1)}{1.2.3.4}f^{IV}(a)$$
$$+\frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3.4.5}f^{V}\left(a-\frac{1}{2}\right)$$

Trasladándonos de nuevo a la Tabla D veremos que Gauss en su segunda fórmula solo usa diferencias alternadas que suben i bajan, a partir de la funcion orijinal, i que, para hacerlas resaltar mas a la vista, las hemos unido con una raya.

Hagamos ahora una recopilacion de las tres fórmulas que ya hemos determinado:

Fórmula de Newton

$$f(a+nw)=f(a)+n\,f'\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{2}f''(a+1)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}f'''\left(a+\frac{3}{2}\right)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}f^{IV}(a+2)+\dots$$

Fórmulas de Gauss

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) & f(a+nw)=f(a)+n\,f'\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}f''(a) \\ & \qquad +\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)+\dots\dots \\ (2) & f(a+nw)=f(a)+n\,f'\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{(n+1)n}{1.2}f''(a) \\ & \qquad +\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)+\dots\dots \end{array}\right.$$

La fórmula de Newton solo usa diferencias situadas en una línea diagonal descendente, como puede verse en la Tabla D.

La primera fórmula de Gauss solo contiene diferencias situadas en una línea zig-zag que baja i sube.

La segunda fórmula de Gauss solo contiene diferencias situadas en una línea zig-zag que sube i baja.

Para interpolar hácia atras se usa siempre la segunda fórmula de Gauss, cambiando *n* por — *n*. Veamos ahora como queda dicha fórmula despues de hacer esta modificacion.

Fórmula de Gauss para la interpolacion en sentido inverso

$$f(a-nw)=f(a)-n\,f'\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{(n-1)\,n}{2}\,f''(a)$$

$$-\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{1.2.3}\,f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3.4}\,f^{IV}(a)$$

El ejemplo que sigue, da una idea mas clara de la manera cómo se trasforma el coeficiente de la tercera diferencia i ayuda tambien a comprender cómo se trasforman los otros coeficientes binomios

$$-\frac{(n+1)-n(-n-1)}{1.2.3}=-\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{1.2.3}$$

Nótese una particularidad de esta fórmula que es: la de tener los signos $-$ $+$ alternados en los términos del 2.º miembro, lo que permite recordarla con facilidad.

Vamos ahora a dar una fórmula jeneral que sirva al mismo tiempo para la interpolacion en sentido directo como en sentido inverso. La fórmula es esta:

$$f\left(a\pm n\,w\right)=f\left(a\right)\pm n\,f'\left(a\pm\frac{1}{2}\right)+\frac{(n-1)\,n}{2}\,f''\left(a\right)$$

$$\pm\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{1.2.3}\,f'''\left(a\pm\frac{1}{2}\right)+\frac{(n-2)\,(n-1)\,n\,(n+1)}{24}$$

$$f^{IV}\left(a\right)\pm\frac{(n-2)\,(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)}{120}\,f^{V}\left(a\pm\frac{1}{2}\right)$$

El signo superior sirve para la interpolacion en sentido directo i el signo inferior para la interpolacion en sentido inverso.

Esta última fórmula puede tambien representarse de la siguiente manera:

$$f(a\pm n\,w)=f(a)\pm n\left\{f'\left(a\pm\frac{1}{2}\right)\pm\frac{(n-1)}{2}\left\{f''(a)\pm\frac{(n+1)}{3}\right.\right.$$

$$\left\{ f'''\left(a \pm \frac{1}{2}\right) \pm \frac{(n-2)}{4} \left\{ f^{IV}(a) \pm \frac{(n+2)}{5} \left\{ f^{V}\left(a \pm \frac{1}{2}\right) \pm \dots\dots \right.\right.\right.$$

La tabla que sigue nos hace ver que las diferencias usadas en las dos fórmulas de Gauss abarcan una faja circunscrita por dos líneas horizontales trazadas arriba i abajo de la funcion orijinal, quedando en la medianía de esta faja las diferencias pares de *a*.

FUNCION	DIFERENCIAS			
	f'	f''	f'''	f^{IV}
$f(a-2w)$				
	$f'\left(a-\frac{3}{2}\right)$			
$f(a-w)$		$f''(a-1)$		
	$f'\left(a-\frac{1}{2}\right)$		$f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)$	
$f(a)$		$f''(a)$		$f^{IV}(a)$
	$f'\left(a+\frac{1}{2}\right)$		$f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)$	
$f(a+w)$		$f''(a+1)$		
	$f'\left(a+\frac{3}{2}\right)$			
$f(a+2w)$				

EJERCICIO

Calcular el logaritmo seno de 22° 24' con la última fórmula de interpolacion de Gauss, interpolando en sentido directo

Fórmula:

$$f(a+nw)=f(a)+n\left\{f'\left(a+\frac{1}{2}\right.+\frac{n-1}{2}\left\{f''(a)+\frac{n+1}{3}\right.\right.$$

$$\left\{f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{n-2}{4}\left\{f^{IV}(a)\right.\right.$$

Como la interpolacion, que vamos a hacer, es en sentido directo solo hemos tomado el signo $+$.

Construyamos ahora la tabla de las diferencias, conteniendo solo aquellas que se necesitan en la fórmula.

TABLA DE LAS DIFERENCIAS

ARGTO.	FUNCION	DIFERENCIAS			
		f'	f''	f'''	f^{IV}
sen 21°					
		(+1925)		(+8)	
sen 22°	9.57358		—95		0
		+ 1830		+8	
sen 23°			(—87)		

NOTA.—Las diferencias que no entran en la fórmula están colocadas entre paréntesis.

Repitiendo la fórmula i aplicándole a sus diversos términos las diferencias numéricas de la Tabla que antecede i sus valores a los respectivos coeficientes binomios, obtendremos:

$$f\,(a+n\,w)=f\,(a)+n\left\{f'\,(a+\frac{1}{2}+\left(\frac{n-1}{2}\left\{f''\,(a)+\frac{n+1}{3}\right.\right.\right.$$

$$\left\{f'''\,(a+\frac{1}{2}+\frac{n-2}{4}\left\{f^{IV}\,(a)\right.\right.$$

siendo $n=\frac{24'}{60}=0,'4$

$$\frac{0,'4-2}{4} \times 0$$

$$\frac{-1,6}{4} \times 0$$

$$+\ 8\ +\ \begin{matrix} -0',4 \times 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$+\ 0,466 \left\{ 8 \right.$$

$$\left\{ -95\ +\ 3.7 \right.$$

$$-0\,3 \left\{ -91.3 \right.$$

$$1830 \quad +\ 27.4$$

$$0',4 \left\{ 1857.4 \right.$$

$$742.96$$

$$\log \text{sen } 22^{\circ} = 9{,}57358$$

$$\log \text{sen } 22^{\circ}\ 24' = 9.58101$$

Fórmula de Stirling

Repitamos la tabla jeneral de las diferencias:

Funciones	Diferencias		
	f'	f''	f'''
f (a − w)		f'' (a − 1)	
	$f'\left(a - \frac{1}{2}\right)$		$f'''\left(a - \frac{1}{2}\right)$
f (a)	$\boxed{f'(a)}$	f'' (a)	$\boxed{f'''(a)}$
$\boxed{f\left(a + \frac{1}{2}\right)}$	$f'\left(a + \frac{1}{2}\right)$	$\boxed{f''\left(a + \frac{1}{2}\right)}$	$f'''\left(a + \frac{1}{2}\right)$
f (a + w)		f'' (a + 1)	

En esta tabla, las diferencias encerradas dentro de un pequeño cuadro:

$$f\left(a + \frac{1}{2}\right),\ f'(a),\ f''\left(a + \frac{1}{2}\right),\ f'''(a)$$

representan los promedios de las diferencias entre las cuales están intercaladas.

Repitamos ahora las dos fórmulas de Gauss:

$$f(a+nw)=f(a)+n\,f'\left(a + \frac{1}{2}\right)+\frac{n.n-1}{2}f''(a)$$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)}{6}f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}f^{IV}(a)$$

$$f(a+nw)=f(a)+n\,f'\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{n.n+1}{2}f''(a)$$

$$-\frac{(n+1)n(n-1)}{6}f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{24}f^{IV}(a)$$

Sumando miembro a miembro estas dos fórmulas, sacando factor comun a los términos semejantes en ámbas i dividiendo por 2 todos sus términos, obtendrémos la siguiente fórmula:

$$f(a+nw)=f(a)+n\left\{\frac{f'\left(a+\frac{1}{2}\right)+f'\left(a-\frac{1}{2}\right)}{2}\right\}+f''\left(\frac{a}{2}\right)\left\{\frac{n.n-1}{2}+\frac{n.n+1}{2}\right\}$$

$$+\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{6}\left\{\frac{f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)+f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)}{2}\right\}+f^{IV}(a)\,\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{24}\left\{\frac{(n-2)+(n+2)}{2}\right\}$$

En esta fórmula los factores:

$$\frac{f'\left(a+\frac{1}{2}\right)+f'\left(a-\frac{1}{2}\right)}{2}\ \text{y}\ \frac{f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)+f''\left(a+\frac{1}{2}\right)}{2}$$

pueden ser respectivamente reemplazados por f' (a) i f''' (a) en virtud de lo que hemos dicho mas arriba.

Luego la fórmula anterior se trasformará en esta otra:

$$f(a+nw)=f(a)+n\,f'(a)+\frac{n^2}{2}f''(a)+\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{6}f'''(a)+\frac{(n+1)\,n^2(n-1)}{24}f^{IV}(a)$$

$$+\frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{120}f^{V}(a)+\frac{(n+2)\,(n+1)\,n^2\,(n-1)\,(n-2)}{720}f^{VI}(a)+\ldots\ldots\ldots$$

Se puede notar en esta última fórmula que todas las diferencias pares tienen n elevado al cuadrado, luego si

$$n < \frac{1}{2} \text{ será } n^2 < \frac{1}{4}$$

Supongamos ahora que n sea igual a 0',12. Veamos qué valores tendrán los coeficientes binomios de n para las segundas, terceras i cuartas diferencias en las tres fórmulas ya conocidas de: Newton, Gauss i Stirling.

	NEWTON	GAUSS	STIRLING
	$n = 0',12$	$n = 0',12$	$n = 0',12$
En f''	$\frac{n(n-1)}{2} = -0{,}053$	$\frac{n(n-1)}{1.2} = -0{,}053$	$\frac{n^2}{2} = +0{,}007$
En f'''	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = +0{,}033$		$\frac{(n+1)n(n-1)}{6} = -0{,}020$
En f^IV	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = -0{,}024$		$\frac{(n+1)n^2(n-1)}{24} = -0{,}0006$

Pero para esplicar mejor el desarrollo de estas trasformaciones, damos en seguida una completa para el coeficiente de la cuarta diferencia en la fórmula de Newton, la que puede servir de ejemplo para determinar de igual manera los otros valores.

Así:

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{24} = \frac{0,12(-0,88)(-1,88)(-2,88)}{24}$$

$$= \frac{(-0.1056)(-1.88)(-2,88)}{24} = \frac{(0,198528)(-2,88)}{24}$$

$$= \frac{-0,57176064}{24} = -0,0238$$

A la simple vista se puede notar que los coeficientes binomios de n son mucho mas pequeños en la fórmula de Stirling que en las de Gauss i Newton, lo que la hace mas apta que las anteriores, para los cálculos de interpolacion, porque los errores introducidos serán tambien mas pequeños.

Repitamos la fórmula de Gauss:

$$f\,(a+nw) = f\,(a) + n\,f'\left(a+\frac{1}{2}\right) + \frac{n.n-1}{2}\,f''(a)$$

$$+ \frac{(n+1)n\,(n-1)}{6}\,f'''\left(a+\frac{1}{2}\right) + \frac{(n1)+n\,(n-1)(n\quad 2)}{24}\,f^{IV}(a)$$

hagamos

$$n = \frac{1}{2}\,.$$

La fórmula se trasformará en esta otra:

$$f\left(a+\frac{w}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}f'\left(a+\frac{1}{2}\right)-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}f''(a)$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}}{2}\cdot f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{128}f^{IV}(a) \quad (A)$$

La trasformacion del coeficiente binomio de la cuarta diferencia se hace de esta manera:

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}}{8}=+\frac{3}{128}$$

I haciendo la reduccion de los coeficientes binomios en los términos de la fórmula (A) obtendremos la nueva fórmula:

$$f\left(a+\frac{w}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}f'\left(a+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}f''(a)$$

$$-\frac{1}{16}f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{128}f^{IV}(a)$$

i haciendo

$$n=-\frac{1}{2}$$

obtendremos:

$$f\left(a+\frac{w}{2}\right)=f\left(a+w-\frac{w}{2}\right)=f(a+1)-\frac{1}{2}f'\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{8}f''(a+1)+\frac{1}{16}f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{128}f^{IV}(a+1)$$

Sumando miembro a miembro estas dos fórmulas i dividiendo por 2 todos sus términos obtendremos:

$$f\left(a+\frac{w}{2}\right)=\frac{f(a)+f(a+1)}{2}-\frac{1}{8}\frac{(f''(a)+f'''(a+1))}{2}$$

$$+\frac{3}{128}\frac{f^{IV}(a)+f^{IV}(a+1)}{2}$$

i sustituyendo respectivamente los factores:

$$\frac{f(a)+f(a+1)}{2};\quad \frac{f''(a)+f'''(a+1)}{2}\quad y\quad \frac{f^{IV}(a)+f^{IV}(a+1)}{2}$$

por sus correspondientes diferencias:

$$f\left(a+\frac{1}{2}\right);f''\left(a+\frac{1}{2}\right)y\,f^{IV}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

resultará la fórmula conocida con el nombre de «*Fórmula de Stirling*», cuya espresion jeneral es la que sigue:

$$f\left(a+\frac{w}{2}\right)=f\left(a+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}f''\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{3}{128}f^{IV}\left(a+\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{1024}f^{VI}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

Debemos hacer notar que en esta fórmula, la mas sencilla i cómoda de todas para calcular i retener en la memoria, solo se emplean los promedios de las diferencias pares, quedando por lo tanto todas las diferencias en una sola línea horizontal.

Como complemento de estas fórmulas de interpolacion servirá tambien el cuadro que sigue, el que nos dará una idea clara de la manera cómo se reparten los errores en las diferencias, cuando se ha cometido un error + x en la funcion orijinal f (a).

Tabla de la reparticion de los errores

Funciones	Diferencias			
	f'	f''	f'''	f^{IV}
f (a − 2 w)				
	$f'\left(a-\frac{3}{2}\right)$			
f (a − w)		$f''(a-1)+x$		
	$f'\left(a-\frac{1}{2}\right)+x$		$f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)-3x$	
f (a) + x		$f''(a)-2x$		
				$f^{IV}(a)+6x$
	$f'\left(a+\frac{1}{2}\right)-x$		$f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)+3x$	
				$f^{IV}(a)-4x$
f (a + w)		$f''(a+1)+x$		
	$f'\left(a+\frac{3}{2}\right)$		$f'''\left(a+\frac{3}{2}\right)-x$	
f (a + 2 w)		$f''(a+2)$		
	$f'\left(a+\frac{5}{2}\right)$			
f (a + 3 w)				

Se puede notar, ipso facto, que los errores se reparten, a partir de la funcion primitiva f (a), en forma de abanico, i que el mayor error se halla en la cuarta diferencia, en la misma línea de la funcion, lo que servirá para indicar al momento en cuál de las funciones primitivas se ha cometido una equivocacion i proceder a correjirlo.

EJERCICIOS FINALES

P.—ENCONTRAR POR LAS FÓRMULAS DE INTERPOLACION DE NEWTON I DE GAUSS EL LOG. SEN DE 22° 24′

Tabla de las diferencias

Argumento	Funciones	Diferencias				
		f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
sen 20°	9,53405					
		+2028				
» 21°	9,55433		—103			
		+1925		+8		
» 22°	9,57358		—95		0	
		+1830		+8		0
» 23°	9,59188		—87		0	
		+1743		+8		—4
» 24°	9,60931		—79		—4	
		+1664		+8		
» 25°	9,62595		—75			
		+1589				
» 26°	9,64184					

$$w = 1^\circ = 60'$$

$$nw = 24'$$

$$n = \frac{nw}{w} = \frac{24'}{60} = 0',4$$

Fórmula de Newton

$$f(a+0',4\,w)=f(a)+n\left\{f'\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{n-1}{2}\left\{f''(a+1)+\frac{n-2}{3}\left\{f'''\left(a+\frac{3}{2}\right)+\ldots\ldots\right.\right.\right.$$

$$f(a+0',4\,w)=9{,}57358+0'4\left\{1830-0',3\left\{-87-0{,}533\left\{8\right.\right.\right.$$

$$-4{,}264$$

$$\left\{-91{,}264\right.$$

$$+27{,}379$$

$$0',4\left\{1857{,}379\right.$$

$$742{,}95$$

$$\log \text{ sen } 22^\circ = 9{,}57358$$

$$\log \text{ sen } 22^\circ 24' = 9{,}58101$$

1.ª Fórmula de Gauss

$$f(a+nw) = f(a) + n\,f'\left(a+\frac{1}{2}\right) + \frac{n.n-1}{2}\,f''(a) + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1.2.3}\,f'''\left(a+\frac{1}{2}\right) + \ldots.$$

$$f(a + 0',4\,w) = 9{,}57358 + 0',4\,(1830) - 0{,}12\,(-95) + \frac{(1',4)\,(0',4)\,(-0',6)}{6} \times 8$$

$$» \quad = 9{,}57358 + 732 + 11{,}40 + \frac{-0{,}336}{6} \times 8$$

$$» \quad = 9{,}57358 + 732 + 11{,}40 - 0{,}056 \times 8$$

$$» \quad = 9{,}57358 + 732 + 11{,}40 - 0{,}448$$

$$» \quad = 9{,}57358 + 732 + 10{,}95$$

$$» \quad = 9{,}57358 + 742{,}95$$

$$743$$

$$\log \operatorname{sen} 22^{\circ}\,24' = 9{,}58101$$

2.ª Fórmula de Gauss

$$f(a+nw) = f(a) + n f'\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{(n+1)n}{2} f''(a) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} f'''\left(a - \frac{1}{2}\right) + \ldots\ldots$$

$$f(a + 0',4\,w) = 9{,}57358 + 0',4\,(1925) + \frac{0{,}56}{2}(-95) + \frac{(1',4)\,0',4\,(-0{,}6)}{6} \times 8$$

$$» \quad = 9{,}57358 + 770 - 26{,}60 + \frac{-0{,}336}{6} \times 8$$

$$» \quad = 9{,}57358 + 743{,}40 - 0{,}448$$

$$» \quad = 9{,}57358 + 742{,}95$$

$$» \quad 743$$

$$\log \operatorname{sen} 22^{o}\ 24' = 9{,}58101$$

Las tres fórmulas dan los mismos resultados.