



# HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

POR

CARLOS WARGNY

(Continuacion)

## CAPÍTULO X

### *Introduccion de las obras árabes en Europa*

El periodo comprendido entre 1150 i 1450 se caracteriza por la introduccion en Europa de las obras orijinales de los árabes i sus traducciones de los textos griegos. Estos conocimientos entraron por España, donde los moros habian establecido las tres grandes escuelas de Granada, Córdoba i Sevilla.

### SIGLO XI

*Geber ibn Afla*, (1140-1190?) es el escritor árabe mas antiguo que menciona la historia. Nació en Sevilla, i escribió sobre astronomía i trigonometría. Sus obras fueron traducidas al latin por Gerard, en 1533. Conocia la relacion de los triángulos esféricos:

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c}$$

*Abraham Arzaquel* (Al Zerkali en árabe), natural de Córdoba, residía en Toledo en 1080. Fijó la oblicuidad de la eclíptica en  $23^{\circ} 34'$  i la precesion entre  $49^{\circ}$  i  $50^{\circ}$ ; construyó las célebres *Tablas de Toledo*, origen de las tablas *alfonsinas*, inventó el astrolabio llamado *zarcalico*; i emitió la idea de que los planetas tienen movimiento elíptico.

## SIGLO XII

*Adelhardo* de Bath, monje inglés, consiguió bajo el disfraz de estudiante mahometano, seguir algunos cursos de estudios en Córdoba, en 1120; i se procuró una copia de los Elementos de Euclides que, traducida al latín, fué la base de todas las ediciones europeas hasta 1533, año en que se descubrió el texto griego. Esta traduccion se esparció rápidamente por toda Europa; i a fines del siglo XIII la conocia Rojerio Bacon. En el siglo XIV, los cinco primeros libros eran enseñados en la mayor parte de las universidades europeas. Sin embargo, los enunciados de sus proposiciones geométricas ya eran conocidas desde el año 1000.

Adelhardo tradujo al latín la obra de Alkarismi i compuso un texto clásico sobre el uso del abaco.

Abraham *Ben Ezra* (1097-1167) nació en Toledo i murió en Roma. Además de algunas tablas astronómicas i de una obra de astrología, redactó un tratado de aritmética en el que espone el sistema árabe de numeracion con las nueve cifras i el cero; da a conocer las operaciones fundamentales de los números i esplica la regla de tres.

*Gerardo* de Cremona (1115-1187) concurrió a las escuelas árabes de Toledo, vertió al latín la edicion árabe del Almagesto, algunas obras de Alhazen i Alfarabio i los Elementos de Euclides.

*Juan Hispalensis* de Sevilla, rabino convertido i contemporáneo de Jerardo, tradujo diversas obras árabes i moriscas i compuso un tratado de algoritmo, en que se encuentran los ejemplos mas antiguos de la estraccion de la raiz cuadrada de números escritos con la notacion decimal.

## SIGLO III

*Leonardo Fibonacci* (1175 . . . .) conocido con el nombre de Leonardo de Pisa, por haber nacido en esta ciudad, hizo sus estudios en Bougie, Berberia, i allí se familiarizó con el sistema árabe de numeracion i conoció el álgebra de Alkarismi. Hacia 1200 publicó en Italia su célebre *Liber abaci*, cuyo título, tomado de la obra de Alkarismi, es *Algebra et almuchabala*. En él explica el sistema de numeracion decimal i hace resaltar las notables ventajas que tiene sobre la numeracion de los romanos; espone los principios del álgebra i emplea la geometría para demostrar las fórmulas; resuelve las ecuaciones de primero i segundo grado i algunas ecuaciones indeterminadas; i concluye aplicando las reglas establecidas a diferentes problemas sobre los números, pudiéndose observar que en un sólo caso emplea las letras como signos de cantidad. Durante dos siglos esta obra fué para los matemáticos la única fuente de esta clase de conocimientos; i el principal mérito que tiene es el haber servido para divulgar en Europa el uso del sistema de numeracion decimal; de modo que a mediados del siglo XIII ya era empleado por el comercio en sus transacciones.

Alfonso el Sabio hizo publicar, en la numeracion árabe, las *tablas alfonsinas* que contienen efemérides astronómicas sacadas de los escritos de los árabes; i se puede decir que entre 1300 i 1350, el sistema decimal era familiar a los matemáticos i comerciantes italianos.

La reputacion de Leonardo como matemático era tan grande, que, en 1225, el emperador Federico II se detuvo con su corte en Pisa para presidir el primer torneo matemático de que hace mencion la historia. Juan de Palermo, de la comitiva del emperador, propuso a Leonardo «encontrar un cuadrado que aumentado o disminuido en 5 diera un cuadrado.» Leonardo calculó que el cuadrado pedido era

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 = 11 + \frac{2}{3} + \frac{1}{144}$$

En seguida, se le propuso resolver la cúbica

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0;$$

i demostró con ayuda de la geometría que el problema era imposible; pero dió a conocer el valor aproximado de una de las raíces

$$1 \frac{22}{60} \frac{7}{60^2} \frac{22}{60^3} \frac{33}{60^4} \frac{4}{60^5} \frac{40}{60^6} = 1, 368\ 808\ 1075$$

El tercero de los problemas tenía el siguiente enunciado: A, B, C poseen la suma  $u$  i las partes que les pertenecen son proporcionales a los números 3, 2, 1.

A toma del total la suma  $x$ , guarda la mitad i entrega el resto a D; B toma la suma  $y$ , guarda los  $\frac{2}{3}$  y entrega el resto a D; por último C toma la suma  $z$ , guarda los  $\frac{5}{6}$  i el resto lo entrega a D: siendo iguales las entregas hechas a D, calcular los valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Leonardo encontró que el problema era indeterminado i dió una de las soluciones  $u=47$ ,  $x=30$ ,  $y=13$ ,  $z=1$ , que se deduce de las ecuaciones

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} x + \frac{1}{3} y + \frac{1}{6} \right) = u, \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} t - u,$$

$$\frac{2}{3} y + u = \frac{1}{3} t - u, \frac{5}{6} z + u = \frac{1}{6} t - u;$$

la ecuacion final es  $7t=47u$ . Agregaremos que Leonardo fué el único que resolvió las tres cuestiones propuestas. En su *Liber abaci* se encuentra la demostracion de las identidades

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2 \\ &= (ad + bc)^2 + (bd - ac)^2 \end{aligned}$$

Su *Práctica Geometricae*, que publicó en 1220, es una compilación de diversas cuestiones de geometría, entre las cuales se lee el área de un triángulo en función de los tres lados.

Años más tarde escribió su *Liber Quadratorum*, compuesto de problemas análogos al primero que le propuso Juan de Palermo. Además se conoce de Leonardo un libro de problemas determinados de álgebra resueltos por la regla de falsa posición.

*Federico II* (1194-1250), emperador de Alemania y fundador de la Universidad de Nápoles, merece una mención especial en esta historia por el interés que mostró por la ciencia y los esfuerzos que hizo para esparcir en la Europa occidental las obras de los árabes.

Rodeóse de judíos ilustrados que en aquellos tiempos poseían a la vez la ciencia del álgebra y el arte de curar; y mediante su concurso logró obtener traducciones de los libros árabes; y a fines del siglo XIII se vieron copias de las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Tolomeo y de los principales autores árabes y moros. Con estos elementos se desarrolló la ciencia en Europa, desde fines del siglo XIV, con entera independencia de las escuelas moriscas.

*Jordano Nemorario* (1180...), llamado también Jordano de Sajonia o teutónico, llegó a ocupar el elevado puesto de superior general de los dominicos, en 1122. Fue autor de varias obras de aritmética y geometría, y es considerado como uno de los más eminentes matemáticos de la Edad Media.

Su obra *De Triangulis* se compone de cuatro libros: en el primero da a conocer algunas definiciones y trece proposiciones sobre los triángulos, según los Elementos de Euclides; el segundo contiene diecinueve proposiciones concernientes a razones de líneas y comparación de áreas. Resuelve el problema de dividir un triángulo en tres partes equivalentes por medio de rectas que unen un punto interior con los tres vértices.

El tercer libro trata de las cuerdas y arcos circulares; y el cuarto, de los polígonos regulares, de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo.

En el *Algoritmo demostrado*, otra de sus obras, espone las cuatro reglas de aritmética, empleando para ello la numeración decimal; i diserta sobre las propiedades de los números compuestos, primos, perfectos i poligonales, de las razones, potencias i progresiones. De la lectura de su obra se desprende que sabia encontrar el desarrollo del cuadrado de un polinomio aljebraico.

En *De Numeris Datis* resuelve ciento quince problemas que conducen a ecuaciones de primero i segundo grados; i sus teoremas jenerales son simples ejemplos numéricos. En estos dos últimos libros emplea con frecuencia las letras para designar tanto las cantidades conocidas como las incógnitas; i en las demostraciones se vale de la aritmética i del álgebra.

El Algoritmo de Jordano fué publicado solamente en 1534, i es de presumir que no fué conocido en su tiempo. De otro modo la notación aljebraica, de la cual la obra de Jordano es el testimonio mas antiguo que se conoce, habria sido adoptada por los hombres de ciencia.

Las obras de mecánica, óptica i astronomía de Jordano no presentan ningun interes para nosotros.

Despues de Leonardo i Jordano no se registra en las pájinas de la historia ningun nombre ilustre sino hasta el siglo XVI, en que aparecen matemáticos comparables con ellos.

En el siglo XIII, los centros mas famosos de instruccion eran Paris i Oxford; i en sus escuelas descollaron algunos cultivadores de las ciencias exactas, como se verá en seguida.

Juan de *Holywood* (—1246), conocido con el nombre latino de Sacrobosco, nació en Yorkshire, se educó en Oxford i enseñó en Paris, de 1244 a 1246. Sus lecciones de algoritmo i álgebra son las mas antiguas que se conocen; i su aritmética i un tratado de la esfera hicieron época en su tiempo. Aun existen los opúsculos *De Computo Ecclesiastico* i *De Astro-labio*.

*Rójerio Bacon* (1214.1294) nació cerca de Ilchester, se

reformular el calendario, explicó el fenómeno de las estrellas errantes, i observó que el sistema de Tolomeo carecia de base desde que se admitía *a priori* que el movimiento natural de un planeta tenia que ser circular. En óptica enunció las leyes de la reflexion de la luz i las de la refraccion, que le sirvieron para explicar el arco iris i las lentes.

En química se ocupó en la transmutacion de los metales, i fué el primero que dió a conocer la composicion de la pólvora, por lo cual algunos le atribuyen su invencion. Se comprende que un solo hombre no podia formular por primera vez los principios de todas las ciencias físicas i naturales, i así se explican las conclusiones falsas a que llega en algunas de sus teorías. En los años que siguieron a la aparicion de su *Opus Magnus*, escribió numerosas obras para desarrollar los principios que estableciera. Muchas de ellas han sido publicadas, pero no existe ninguna edicion completa de sus obras. A la muerte de Clemente IV, su protector, le sucedió en el papado Nicolas IV, superior de la órden de los franciscanos, que parece no aprobaba las investigaciones de su inferior. En 1280, Bacon fué acusado de májia i se le condenó a prision perpétua. Despues de diez años de reclusion, se le dió la libertad un año ántes de su muerte. Rogerio Bacon es considerado como el precursor de Francisco Bacon, de Galileo i de Newton.

Juan *Campano* (1280 ), canónigo de Paris, publicó la traduccion de Euclides que hizo Adelhardo, con un comentario sobre el pentágono estrellado. Dió a luz, ademas, una version libre del *Almajesto*.

#### SIGLO XIV

Tomas *Bradwardine* (1290 1349), nació en Chichester, estudió en Oxford, en cuya universidad desempeñó el profesorado, i en 1340 fué elejido arzobispo de Canterbury. Dió a la estampa diversas obras matemáticas, entre las que se mencionan un tratado de las proporciones, una aritmética i

jeometría especulativas i un libro sobre la cuadratura del círculo, trabajos todos que reflejan el estado de las ciencias en aquella época.

Nicolas *Oresme* (1323-1382), nació en Caen; confidente íntimo de Carlos V de Francia i tutor de su hijo Carlos VI, fué nombrado obispo de Liseux.

Distinguióse tanto en economía política i teología como en matemáticas i compuso su *Algorismus Proportionum*, en que introduce el uso de los índices fraccionarios. Sin embargo, su reputación descansa principalmente en una obra que trata de las monedas i del cambio comercial, en que hace uso de los quebrados.

A fines del siglo XIV se produjo en las universidades un levantamiento jeneral contra la escolástica. Petrarca, mas conocido en su tiempo como humanista que como poeta, dió la señal de este movimiento de revolución intelectual. La universidad de Paris, en 1366, reformó el programa del cuadrivio, i dos años mas tarde siguieron su ejemplo las universidades de Oxford i Cambridge. A juzgar por los estatutos de la universidad de Praga, que datan de 1384, los candidatos al grado de bachiller debían haber leído el tratado de la esfera de Holywood; i los maestros en artes tenían que conocer los seis primeros libros de Euclides, la óptica, la hidrostática, la teoría de la palanca i la astronomía. En los cursos se enseñaba la aritmética, el arte de contar con los dedos, el algoritmo de los números enteros, la formación del almanaque i el Almajesto de Tolomeo. En la universidad de Viena, en 1389, se exigían, para optar al grado de maestro en artes, los conocimientos de los cinco primeros libros de Euclides, la perspectiva, las proporciones, las áreas i la teoría de los planetas de Campano. El estudiante debía presentar, además, una composición escrita o dar una conferencia sobre un tema propuesto.

los árabes i moros; i su forma definitiva es conocida con el nombre de cifras Gobar. Desde el año 1500 las cifras han conservado su forma hasta hoi dia.

Ya se dijo cómo conocieron los europeos, a mediados del siglo XIII, la numeracion decimal. El comercio de aquellos tiempos estaba en manos de los italianos, i la numeracion adoptada por ellos presentaba tales ventajas que su adopcion fué jeneral. A pesar de todo, la oposicion a este cambio de numeracion no dejó de presentarse; i en una decision de la Universidad de Padua, en 1348, se ordena que los precios de los libros deben espresarse «no con cifras sino con letras claras». Esta costumbre prevalece en los escritos judiciales de hoi dia i en los documentos comerciales. A los hombres de ciencia i a los negociantes se debe principalmente la rapidez con que se estendió en Europa el uso del algoritmo árabe. Los fabricantes de almanaques contribuyeron tambien a este uso universal, porque cada monasterio i cada iglesia tenian que poseer por lo ménos un ejemplar. Los habia para el uso eclesiástico i para el de los astrólogos i médicos; todos estaban escritos con la numeracion árabe i traian en su primera pájina una nota esplicativa de su correcto empleo i significado. No obstante de la evidente superioridad de la numeracion árabe, fuera de Italia i hasta 1550, los comerciantes siguieron empleando las cifras romanas; i en Inglaterra no se encuentra en los archivos ningun registro anterior a 1500 con la numeracion decimal.

El progreso de la aritmética comercial hai que atribuirlo a los comerciantes i autores florentinos, a quienes se debe ademas el método de la teneduría de libros por partida doble i la clasificacion de los problemas de aritmética en regla de tres, de interes, de ganancias i pérdidas, etc., tal como aparece en los textos de enseñanza de nuestros colejos. Fueron ellos los que redujeron las operaciones de aritmética al número de siete, a saber: numeracion, adiccion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion a potencias i extraccion de raíces. Este es otro adelanto de importancia, si se toma en cuenta que el célebre aljebriista Bramagupta habia au-

mentado su número a 20. En Alemania se crearon varias escuelas de aritmética en el siglo XIV, las que contribuyeron a vulgarizar la aritmética comercial i algorítmica.

Las principales mejoras que fueron introducidas en la aritmética comercial formada por los italianos, son en número de cuatro: I. simplificación de las cuatro operaciones, II. introducción de los signos de operación, III. invención de los logaritmos i IV. uso de los decimales. I. Respecto del modo de operar, los árabes sumaban i restaban de izquierda a derecha, método que tiene sus ventajas en los cálculos de aproximación. El procedimiento moderno, según algunos autores, se debe a Garth, inglés de origen, i fué introducido a principios del siglo XVII.

La multiplicación era considerada como una operación difícil i el modo de efectuarla era también laborioso, por cuanto no se conocía la tabla de multiplicar. Pacioli i Tartaglia dan ejemplos de esta operación que explicamos en seguida. Por aquel entonces principió a emplearse una tabla pitagórica reducida, desde 1 hasta 5 solamente. Para usarla se aplicaba la *regula ignavi*, regla del ignorante, expresada en la identidad:

$$(5 + a)(5 + b) = (5 - a)(5 - b) + 10(a + b).$$

Ejemplo:  $7 \times 9 = (5 - 2)(5 - 4) + 10(2 + 4) = 3 \cdot 1 + 60 = 63.$

El procedimiento es ingenioso i merece ser conocido. Por convención, una mano abierta representa el número 5, la misma con un dedo cerrado 6, con dos dedos 7, i así sucesivamente. Una de las manos hace las veces de multiplicando i la otra de multiplicador. Para operar basta multiplicar el número de dedos abiertos ( $5 - a$  por  $5 - b$ ) i al producto agregarle diez veces el número de dedos cerrados  $10(a + b)$ . Se cree que en Florencia se operó por primera vez como se hace hoy en la multiplicación de dos números enteros.

La multiplicación de números con muchas cifras solo la podían hacer los calculistas más hábiles; i a causa de las

de d i 8 de e, i la resta  $9=13-1\times 4$  se ponía en c i se borra ba 5 de c, etc.

## II

En la última parte del capítulo XII daremos a conocer el origen de los signos de operación, diciendo, por ahora, de paso que en el tratado de aritmética de Widman, impreso en 1489, se ven por primera vez los signos + i -; en 1544 los emplea Stiffel; pero hai que mirar a Vieta como el verdadero introductor de estos signos en los textos de matemáticas.

## III

La invención de los logaritmos es debida a Napier de Merchiston (nombre que los autores franceses escriben Neper), que la dió a conocer en su obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, impresa en 1614, en la que hace ver la relación conocida que hai entre los términos de las progresiones aritmética i jeométrica.

Esplica, además, el uso de los logaritmos i agrega una tabla con 7 decimales, de minuto en minuto, de los logaritmos del seno i tanjente del primer cuadrante.

El log. n corresponde a la notación moderna

$$10^7 \log_e \left( \frac{10^7}{n} \right)$$

En la obra póstuma *Construtio*, publicada en 1619, se indica que la construcción de la tabla de logaritmos se hizo mediante el cálculo de potencias, raíces i medios jeométricos.

Los resultados se obtenían después de un trabajo tan largo como penoso, según se puede leer en la introducción de las tablas de Callet. El método de las series fué introducido por Newton, Cotes i Euler.

después de su muerte; además de los logaritmos de las líneas trigonométricas, contiene el valor de las líneas naturales. Juan Speidell había dado a la estampa, en 1619, una tabla de los logaritmos naturales de base e, de 1 a 1,000 i de las tangentes i secantes del cuadrante I. IV. Atribuimos igualmente a Briggs el empleo de los números decimales i su notación. Es cierto que, en 1585, Stevin había empleado una notación parecida, porque escribía  $25,3'1''9'''$  o bien 25 (0) 3 (1) 1 (2) 9 (3) en vez de la notación decimal moderna 25,319.

Napier usó la primera notación, Rudolff usaba otra casi idéntica i Bürgi escribía  $1\frac{4}{10}14$  en vez de 1,414. Conviene advertir que aun en el día la notación decimal no es uniforme, porque los ingleses usan el punto i los franceses la coma, para separar la parte entera de la decimal. En la otra de Napier, titulada *Constructio*, aparecen los logaritmos con la notación decimal que nosotros empleamos en el día.

Pero antes del siglo XVI las fracciones se escribían en notación sexagesimal, como se vió en el problema resuelto por Leonardo Pisa. Briggs usó además la raya para indicar la parte decimal;  $\underline{1\ 3\ 1\ 4}$  en vez de 1,314; otros autores separaban la parte decimal con una raya vertical i subrayaban sus cifras:  $1\ | \underline{314}$ . Desde principios del siglo XVIII se generalizó el empleo de la coma de separación i se hizo universal con la introducción del sistema métrico decimal de los franceses.

(Continuará)