

Homenaje a
Rodrigo Flores Álvarez
AUCH, 5ª serie, Nº 21 (1989): 475-512

DIMENSIONAMIENTO ÓPTIMO DE ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO EN FLEXIÓN RECTA SEGÚN CÓDIGO ACI

JUAN CASSIS*
HÉCTOR SCHERER**

1. INTRODUCCIÓN

La búsqueda de soluciones óptimas es una actitud natural en el hombre al encontrarse inmerso en un mundo de recursos escasos. Durante milenios esa búsqueda se realizó utilizando capacidades básicas como el instinto, la intuición, la imaginación, la experiencia y el razonamiento plausible. En las últimas centurias, la ciencia ha venido en ayuda del desarrollo tecnológico, permitiéndole encontrar soluciones razonablemente seguras y económicas apoyadas en leyes interpretativas de los fenómenos naturales y en herramientas matemáticas adecuadas.

A comienzos de este siglo hubo algunos intentos primarios de encontrar leyes y relaciones matemáticas para las estructuras óptimas; sin embargo, esos trabajos pasaron al olvido por ser muy teóricos y no disponerse en esa época de las herramientas poderosas de análisis que existen hoy en día (1, 2). Sólo en la década de 1940, por necesidades de la industria aeronáutica, se comenzaron a desarrollar métodos de diseño estructural óptimo orientados a aplicaciones prácticas (3). En la siguiente década, la

*Profesor Titular, Depto. Ingeniería Civil, U. de Chile.

**Ingeniero Civil, Universidad de Chile.

disponibilidad del computador catalizó el desarrollo de esta área de la tecnología y de la ciencia (4, 5).

La mayor parte de los esfuerzos en el desarrollo del diseño óptimo ha estado orientada a materiales supuestos homogéneos e isotrópicos, como el acero. Sin embargo, la industria aeroespacial ha exigido estudios de materiales compuestos y, además, en los últimos años, se han estado estudiando las estructuras óptimas de hormigón armado (6-10).

El diseño óptimo de estructuras hiperestáticas es normalmente un proceso iterativo en el cual se requiere realizar varios análisis estructurales según cambien las variables de diseño. Esto sucede en las estructuras de acero cuando las variables son de dimensionamiento y están, por lo tanto, asociadas a las secciones transversales de los elementos. Siendo el hormigón un material más complejo que el acero, su diseño óptimo se puede tratar, sin embargo, en forma más simple. En efecto, si se trata de dimensionar secciones donde, como es habitual, se supone fija la sección de hormigón y se busca la armadura óptima, las propiedades de rigidez relativa de las diversas secciones de la estructura permanecen esencialmente fijas, y es necesario, entonces, realizar un solo análisis estructural para encontrar la armadura mínima de cada sección.

El tratamiento del problema del dimensionamiento óptimo de secciones de hormigón armado sometidas a flexión compuesta se puede dividir en dos métodos: uno analítico para el estudio de secciones rectangulares en flexión compuesta recta y otro numérico para flexión esviada y secciones de forma cualquiera (11). En este trabajo se presenta el desarrollo analítico para el primer caso, basado en las disposiciones del código ACI 318-83 (12), ya que éste constituye la base del código chileno de hormigón armado actualmente en estudio. Como resultado práctico, se entregan ábacos de dimensionamiento. Este problema ha sido tratado en forma similar aplicado al código CEB (7, 8, 13, 14, 15).

2. HIPÓTESIS DE DISEÑO

Se utilizan las disposiciones del código ACI 318-83, destacándose las siguientes:

- Una sección plana se mantiene plana después de deformada.
- Se desprecia la resistencia a la tracción del hormigón.
- Se usa un bloque rectangular de tensiones del hormigón en un estado límite último. La tensión tiene el valor $0.85 f_c$ y el bloque alcanza la profundidad $\beta_1 c$, siendo c la profundidad de la fibra neutra.
- El acero tiene un comportamiento elasto-plástico.

- e) La máxima deformación permitida para el hormigón comprimido es de 3 ‰. Este valor es el único pivote para los estados límites últimos de deformación.
- f) Las armaduras están limitadas por valores máximos y mínimos.

3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La sección de hormigón se supone fija y se busca la armadura mínima. En el caso de flexión compuesta recta se pueden definir una armadura superior y otra inferior, que se pueden especificar por dos variables de diseño independientes, A_s y A_s' , en que A_s representa el área transversal de la armadura inferior, que se supone la más traccionada o menos comprimida de la sección, y A_s' representa la armadura superior.

Las restricciones del problema se refieren a que las deformaciones en la sección no deben sobrepasar ningún estado límite último. Luego la formulación del problema es la siguiente:

Determinar A_s y A_s'

tal que $A_t = A_s + A_s' \rightarrow \text{mín}$

sujeto a que la distribución de deformaciones no sobrepase ningún estado límite último.

4. ANÁLISIS DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR

Los estados límites últimos de deformación del código ACI especifican un pivote asociado a la deformación máxima de compresión del hormigón, que es de 3‰. De acuerdo con esto, el campo de deformaciones últimas se puede dividir en 3 zonas:

Zona I : ambas armaduras están traccionadas

Zona II : la armadura superior está comprimida y la inferior traccionada,

Zona III : ambas armaduras están comprimidas.

La Fig. 1 muestra la geometría de la sección rectangular y un estado límite último de deformación genérico. La nomenclatura mostrada en la figura es la siguiente:

h = altura total de la sección,

b = ancho de la sección,

d = altura útil,

d' = distancia del extremo de la sección al centro de gravedad de la armadura; se supone igual para ambas armaduras.

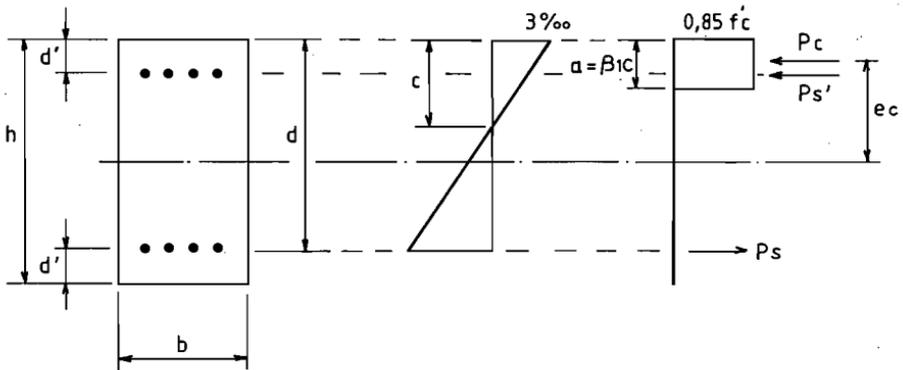


Fig. 1. Flexión recta en sección rectangular.

c = profundidad de la fibra neutra.

a = profundidad del bloque de tensiones.

De acuerdo con el código ACI el valor del factor β_1 es

$$\beta_1 = \text{máx} [0,65; \text{mín} \{0,85; 0,85 - 0,008 (f'_c - 30) \}] \quad (1)$$

En esta fórmula, la resistencia especificada a la compresión del hormigón está medida en MPa.

5. ESFUERZO RESISTIDOS POR EL HORMIGÓN SOLO

En el análisis de la búsqueda de la armadura óptima conviene expresar separadamente las resistencias del hormigón y de las armaduras de acero.

Por conveniencia se definen las siguientes variables adimensionales:

$$\xi = \frac{c}{h} \quad (2)$$

$$\delta' = \frac{d'}{h} \quad (3)$$

$$\nu_c = \frac{P_c}{bh f'_c} \quad (4)$$

$$\mu_c = \frac{M_c}{bh^2 f'_c} \quad (5)$$

donde

P_c = esfuerzo resistido por el hormigón,

$M_c = P_c \cdot e_c$ momento resistido por el hormigón con respecto al centro de gravedad de la sección,

f'_c = resistencia especificada a la compresión del hormigón.

La convención de signos que se usará para los esfuerzos es la siguiente: son positivos el esfuerzo de compresión y el momento que tienda a traccionar la fibra extrema inferior.

De las definiciones anteriores, y considerando la Fig. 1, se deduce que las expresiones de los esfuerzos en el hormigón son:

$$\nu_c = 0,85 \beta_1 \xi \quad (6)$$

$$\mu_c = \frac{0,85}{2} \beta_1 \xi (1 - \beta_1 \xi) \quad (7)$$

Estas expresiones dependen del parámetro ξ , el cual se puede eliminar, dando la relación directa entre ν_c y μ_c siguiente,

$$\mu_c = \frac{\nu_c}{2} \left(1 - \frac{\nu_c}{0,85} \right) \quad (8)$$

La ec. (8) es la de una parábola y representa la curva de interacción de los esfuerzos en el hormigón. Esta ecuación es válida hasta que la profundidad del bloque resistente del hormigón sea igual a la altura total de la sección; en esta situación se tiene

$$\beta_1 c = h \quad (9)$$

lo que da para ξ el rango de validez

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{\beta_1} \quad (10)$$

El máximo de la parábola, definido como estado límite M, se produce para los siguientes valores

$$\nu_{cM} = \frac{0,85}{2}, \mu_{cM} = \frac{0,85}{8}, \xi_M = \frac{1}{2\beta_1} \quad (11)$$

Otro punto interesante de la curva es el que caracteriza al estado balanceado, o sea, aquel en que se alcanzan simultáneamente la deformación máxima de compresión en el hormigón de 0.003 y la deformación ϵ_y en el acero, que corresponde a su resistencia especificada a la fluencia f_y . En este caso se cumple la relación

$$\xi_B = \frac{1 - \delta'}{1 + \epsilon_y/3} \quad (12)$$

donde ϵ_y está expresado en ‰. Este punto se denomina B.

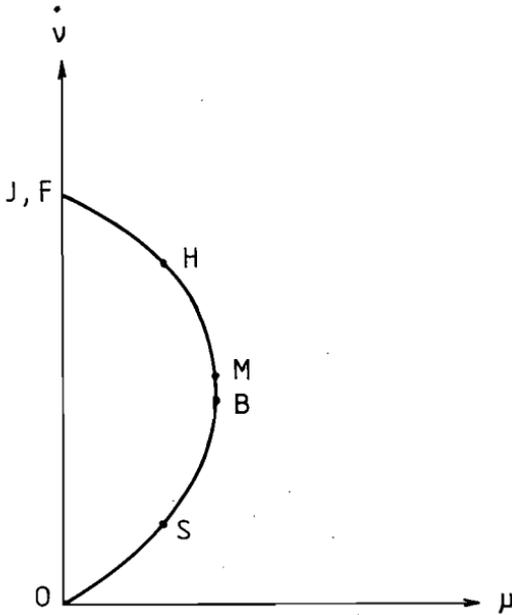


Fig. 2. Curva de interacción de los esfuerzos resistidos por el hormigón solo.

La Figura 2 muestra la parábola de la ec. (8), en la cual se destacan algunos puntos relevantes, que se describen a continuación.

Estado O: $\xi_o = 0$

Estado S: $\xi_s = \delta'$

Estado B: $\xi_B = \frac{1 - \delta'}{1 + \epsilon_v/3}$

Estado M: $\xi_M = \frac{1}{2\beta_i}$

Estado H: $\xi_H = 1 - \delta'$

Estado J: $\xi_J = \frac{1}{\beta_i}$

Estado F: $\xi = \frac{1 - \delta'}{1 - \epsilon_v/3}$

Los estados S y H son, respectivamente, los límites entre las zonas I y

II, y II y III definidas en la Sección 4. El punto J corresponde al instante en que el bloque de compresiones llena completamente la sección. Para deformaciones mayores, el acero es capaz de seguir acortándose pero el hormigón ya alcanzó su máxima resistencia. Las deformaciones culminan en el estado F, donde ambas armaduras alcanzan la fluencia.

6. ESFUERZOS RESISTIDOS POR LAS ARMADURAS

Si P_s es el esfuerzo que toma una armadura, el momento de ese esfuerzo con respecto al eje de la pieza rectangular es (ver Fig. 1).

$$M_s = P_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) \quad (13)$$

Dividiendo por $bh^2f'_c$ y ordenando, se obtiene

$$\frac{\mu_s}{\nu_s} = 0.5 - \delta' \quad (14)$$

siendo $\mu_s = M_s/bh^2f'_c$ y $\nu_s = P_s/bhf'_c$

La ec. (14) indica que los esfuerzos en las armaduras μ_s y ν_s están sobre una recta en el gráfico $\mu-\nu$. La pendiente de esa recta vale

$$m' = \frac{1}{0.5 - \delta'} \quad (15)$$

para la armadura superior y

$$m = - \frac{1}{0.5 - \delta'} \quad (16)$$

para la inferior. En efecto, de acuerdo con la convención de signos, si la armadura superior está comprimida ambos esfuerzos μ_s' y ν_s' son positivos, y si está traccionada ambos son negativos, dando como resultado $m' > 0$. En el caso de la armadura inferior, si está comprimida, $\nu_s > 0$ y $\mu_s < 0$, y si está traccionada, $\nu_s < 0$ y $\mu_s > 0$, dando en ambos casos $m < 0$.

En la búsqueda de la armadura total mínima imponemos la igualdad entre los esfuerzos solicitantes mayorados y las resistencias nominales minoradas.

$$P_u = \phi P_n \quad (17)$$

$$M_u = \phi M_n \quad (18)$$

en que

P_u, M_u = esfuerzo axial y momento solicitantes mayorados,

P_n, M_n = esfuerzo axial y momento nominales,

ϕ = factor de minoración de resistencias.

De acuerdo con el ACI 318-83 el factor ϕ vale 0,9 para flexión pura o flexotracción y 0,7 para flexocompresión en que $\phi P_n > \min(0,10 f'_c A_g; \phi P_b)$. Para valores de ϕP_n entre 0 y ese límite, los valores de ϕ se pueden interpolar linealmente. Aquí P_b es el esfuerzo axial resistente nominal en el estado balanceado y A_g es el área total de la sección.

Si se descomponen los esfuerzos resistentes en los correspondientes al hormigón y a las armaduras de acero, las ecs. (17) y (18) se pueden escribir en las formas

$$P_u = \phi(P_c + P_s + P_s') \quad (19)$$

$$M_u = \phi(M_c + M_s + M_s') \quad (20)$$

y en forma de las variables adimensionales de esfuerzos, las expresiones anteriores quedan como sigue

$$v_u = \phi(v_c + v_s + v_s') \quad (21)$$

$$\mu_u = \phi(\mu_c + \mu_s + \mu_s') \quad (22)$$

Dado un estado límite último, se tiene establecida la posición de la fibra neutra. Con este dato, dado que la sección de hormigón es fija, se pueden calcular los esfuerzos del hormigón (μ_c, v_c), además de las deformaciones en las armaduras. Por lo tanto, definido un estado límite último y dado un vector de diseño (μ_u, v_u), las incógnitas del problema son los vectores (μ_s, v_s) y (μ_s', v_s'). Para resolver estas cuatro incógnitas existen cuatro ecuaciones que son: las ecs. (21) y (22) y dos ecuaciones provenientes de aplicar la ec. (14) a las armaduras superior e inferior.

7. ESTADOS LÍMITES ÚLTIMOS COMPATIBLES CON UNA SOLICITACIÓN DADA

El sistema de ecuaciones anterior no siempre tiene solución ya que ésta está sujeta a la compatibilidad de los signos de las deformaciones del hormigón y del acero. En efecto, los puntos S y H de la Fig. 2 son los límites entre deformaciones de tracción y compresión de las armaduras; de esta manera si ambas armaduras están traccionadas, sólo se pueden alcanzar estados límites últimos de deformación en la zona O S (zona I); si la armadura superior está comprimida y la inferior traccionada, se podrá alcanzar la zona S H (zona II); y, finalmente, si ambas armaduras están

comprimidas, ellas se asocian a diseños en H J (zona III). Por otro lado, los esfuerzos (μ, ν) en una sección se pueden descomponer en tres vectores: uno que representa los esfuerzos en el hormigón, otro que representa los esfuerzos en la armadura inferior y que es paralelo a una recta de inclinación m (Ec. (16)) y el último que representa los esfuerzos en la armadura superior y que es paralelo a una recta de inclinación m' (Ec. (15)). En la Fig. 3 la recta SS' tiene la inclinación

$$\theta = \text{arctg } m \quad (23)$$

y la recta HH' tiene la inclinación

$$\theta' = \text{arctg } m' \quad (24)$$

teniéndose, además, por las ecs. (15), (16), (23) y (24)

$$\theta = -\theta' \quad (25)$$

Por ejemplo desde un punto A (vector \vec{OA} de esfuerzos en el hormigón), de la zona I, se pueden trazar vectores AA_1 y A_1A_2 que representan esfuerzos en las armaduras que son paralelos a SS' y HH' y deben tener sentidos de descenso, ya que ambos esfuerzos ν son de tracción, y por lo tanto negativos. Por las características de esta construcción geométrica, se infiere que para μ positivo los estados límites últimos de la zona I (zona OS) se pueden alcanzar sólo por solicitaciones situadas en el área limitada por el eje vertical, la línea OS y la SS' , área que se denomina I.

Usando el mismo razonamiento se define la zona de solicitaciones situada entre las líneas SS' , SH y HH' para alcanzar estados límites últimos de la zona II (zona SH), cuya construcción típica de esfuerzos en las armaduras es EE_1 (vector descendente) y E_1E_2 (vector ascendente), correspondientes a: tracción en la armadura inferior y compresión en la superior.

Finalmente la zona III tiene una construcción típica de vectores ascendentes CC_1 y CC_2 , que corresponden a ambas armaduras en compresión, y está limitada por las líneas HH' , HJ y el eje vertical.

La Fig. 3 presenta entonces, un resumen de las diferentes zonas y construcciones de vectores de esfuerzos, mostrando las restricciones existentes para asociar un vector de fuerzas solicitantes con un estado límite último de diseño.

Notar que estados en que $\mu_c < 0$ (zonas OS_s y JH_s), se pueden alcanzar desde puntos con $\mu_u > 0$. Además, debe tenerse presente que desde una solicitación no siempre se pueden alcanzar todos los estados últimos en la zona correspondiente. Por ejemplo, desde el punto D_1 , por construcción, sólo se pueden alcanzar estados límites últimos en la zona parcial SD.

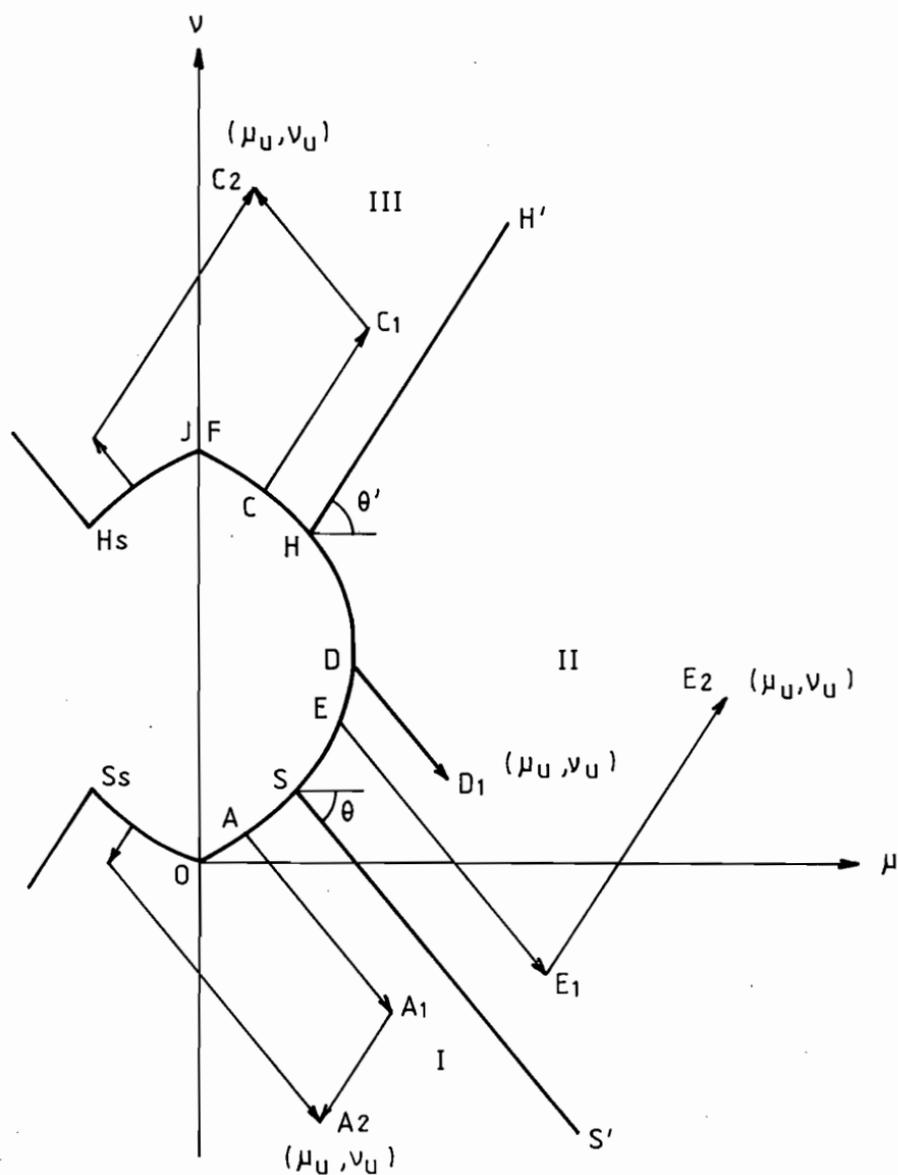


Fig. 3. Estados límite últimos compatibles con una sollicitación dada.

8. DIMENSIONAMIENTO ÓPTIMO

Para determinar la cuantía total mínima de acero correspondiente a una sollicitación cualquiera (μ_u , ν_u), se estudiará el comportamiento de esa cuantía cuando varía la profundidad de la fibra neutra.

Por conveniencia se trabajará con los valores absolutos de los esfuerzos μ y ν . Las variables de dimensionamiento serán las cuantías mecánicas de las armaduras en representación de las áreas transversales.

$$\omega_s = \frac{A_s f_y}{bh f'_c} \quad (26)$$

$$\omega_s' = \frac{A_s' f_y}{bh f'_c} \quad (27)$$

El esfuerzo adimensional que toma una armadura genérica es

$$\nu_s = \frac{P_s}{bh f'_c} = \frac{A_s f_s}{bh f'_c} \quad (28)$$

De la ecs. (26), (27) y (28) se deduce que:

$$\omega_s = \nu_s \frac{f_y}{f_s} \quad (29)$$

y, similarmente,

$$\omega_s' = \nu_s' \frac{f_y}{f_s'} \quad (30)$$

Por consiguiente, la función objetivo a minimizar es

$$\omega_t = \omega_s + \omega_s' = \nu_s \frac{f_y}{f_s} + \nu_s' \frac{f_y}{f_s'} \quad (31)$$

La armadura ω_t mínima se deducirá calculando la derivada de ω_t con respecto a la profundidad de la fibra neutra en las zonas I, II y III.

Zona I: ambas armaduras en tracción

En esta zona el factor ϕ es variable, sin embargo, dado que el vector de esfuerzos sollicitantes (μ_u , ν_u) es un dato en la optimización, el factor ϕ también tendrá un valor fijo, de acuerdo con el nivel del esfuerzo axial ν_u .

Como se está trabajando con los valores absolutos de los esfuerzos, las ecuaciones de equilibrio (21) y (22) se pueden escribir, para el caso de ambas armaduras en tracción, como

$$\nu_u = \phi \nu_c - \phi \nu_s' - \phi \nu_s \quad (32)$$

$$\mu_u = \phi \mu_c - \phi \mu_s' + \phi \mu_s \quad (33)$$

De las ecs. (32) y (33) más dos ecuaciones deducidas de la ec. (14) aplicada a cada una de las armaduras, se obtienen los esfuerzos en las armaduras, con los siguientes resultados:

$$\nu_s = \frac{1}{2} \left[\nu_c - \frac{\nu_u}{\phi} \right] + \frac{1}{1 - 2\delta'} \left[\frac{\mu_u}{\phi} - \mu_c \right] \quad (34)$$

$$\nu_s = \frac{1}{2} \left[\nu_c - \frac{\nu_u}{\phi} \right] - \frac{1}{1 - 2\delta'} \left[\frac{\mu_u}{\phi} - \mu_c \right] \quad (35)$$

En la zona I la profundidad de la fibra neutra está en el rango

$$0 \leq \xi \leq \delta' \quad (36)$$

Para valores de recubrimientos usuales, se tiene

$$\xi_s = \delta' < \xi_M = \frac{1}{2\beta_1} \quad (37)$$

Por lo cual, al no alcanzarse el máximo de la parábola de Fig. 2, los valores de la derivada $d\nu_c/d\mu_c$ son siempre positivos en el intervalo $(0, \delta')$. Por otro lado, es fácil verificar que en este intervalo la armadura inferior está siempre en fluencia para valores de δ' entre 0,05 y 0,20 y para los aceros usuales A 44-28 y A 63-42; en cambio la armadura superior fluye en tracción hasta una profundidad de la fibra neutra cuyo valor es

$$\xi_f' = \frac{\delta'}{1 + \frac{\epsilon_y}{3}} \quad (38)$$

con ϵ_y en ‰.

De acuerdo con esto, en el intervalo $(0, \delta')$ se tiene siempre para la armadura inferior

$$f_s = f_y \quad (39)$$

Para la armadura superior, se define el factor

$$K = \frac{f_y}{f_s'} \geq 1 \quad (40)$$

en que el valor $K = 1$ se produce para $\xi \leq \xi_r'$.

Considerando las relaciones anteriores la ec. (31), que da la armadura total, se puede escribir en la forma

$$\omega_t = v_s + K v_s' \quad (41)$$

De esta expresión se tiene, derivando con respecto a ξ ,

$$\frac{d\omega_t}{d\xi} = \frac{dv_s}{d\xi} + K \frac{dv_s'}{d\xi} + \frac{dK}{d\xi} v_s' \quad (42)$$

Desarrollando el último término del 2º miembro de la ec. (42)

$$\begin{aligned} v_s' \frac{dK}{d\xi} &= v_s' \frac{d\left(\frac{f_y}{f_s'}\right)}{d\xi} = -v_s' \frac{f_y}{f_s'^2} \frac{df_s'}{d\xi} \\ &= -\frac{v_s'}{f_s'} K \frac{df_s'}{d\xi} = -\frac{\omega_s'}{f_s'} \frac{df_s'}{d\xi} \end{aligned} \quad (43)$$

Reemplazando la expresión de ec. (43) en la ec. (42) queda

$$\frac{d\omega_t}{d\xi} = \frac{dv_s}{d\xi} + K \frac{dv_s'}{d\xi} - \frac{\omega_s'}{f_s'} \frac{df_s'}{d\xi} \quad (44)$$

Las expresiones de las derivadas de los esfuerzos axiales de las armaduras se deducen de la ecs. (34) y (35), y son

$$\frac{dv_s}{d\xi} = \frac{1}{2} \left[\frac{dv_c}{d\xi} - \frac{d\left(\frac{v_u}{\phi}\right)}{d\xi} \right] + \frac{1}{1-2\delta'} \left[\frac{d\left(\frac{\mu_u}{\phi}\right)}{d\xi} - \frac{d\mu_c}{d\xi} \right] \quad (45)$$

$$\frac{dv_s'}{d\xi} = \frac{1}{2} \left[\frac{dv_c}{d\xi} - \frac{d\left(\frac{v_u}{\phi}\right)}{d\xi} \right] - \frac{1}{1-2\delta'} \left[\frac{d\left(\frac{v_u}{\phi}\right)}{d\xi} - \frac{d\mu_c}{d\xi} \right] \quad (46)$$

pero v_u/ϕ y μ_u/ϕ son constantes, luego se tiene

$$\frac{dv_s}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{dv_c}{d\xi} - \frac{1}{1-2\delta'} \frac{d\mu_c}{d\xi} \quad (47)$$

$$\frac{dv_s'}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{dv_c}{d\xi} + \frac{1}{1-2\delta'} \frac{d\mu_c}{d\xi} \quad (48)$$

Reemplazando estas expresiones en la ec. (44) y ordenando resulta

$$\frac{d\omega_1}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{dv_c}{d\xi} (1+K) + \frac{1}{1-2\delta'} \frac{d\mu_c}{d\xi} (K-1) \frac{\omega_s'}{f_s'} \frac{df_s'}{d\xi} \quad (49)$$

Analicemos, ahora, el signo de la derivada $d\omega_1/d\xi$.

El esfuerzo axial en el hormigón vale

$$v_c = 0,85 \beta_1 \xi \quad (50)$$

luego

$$\frac{dv_c}{d\xi} = 0,85 \beta_1 > 0 \quad (52)$$

Veamos ahora el signo de $d\mu_c/d\xi$,

$$\frac{d\mu_c}{d\xi} = \frac{d\mu_c}{dv_c} \frac{dv_c}{d\xi} > 0 \quad (52)$$

ya que $d\mu_c/dv_c > 0$ en el intervalo en estudio.

Con respecto a otros términos de la ec. (49), al ser $K \geq 1$ se tiene que $K+1 > 0$ y $K-1 \geq 0$. Además al término $(1-2\delta') > 0$ para valores de δ' hasta 0,20.

Como resultado de lo anterior, se deduce que los dos primeros términos del 2º miembro de la ec. (49) son positivos. Queda por analizar el tercero.

Con este propósito se calcula la expresión para la tensión en la armadura superior.

De la Fig. 4 se deduce la relación

$$\varepsilon_s' = 0.003 \left(\frac{d'}{c} - 1 \right) = 0.003 \left(\frac{\delta'}{\xi} - 1 \right) \quad (53)$$

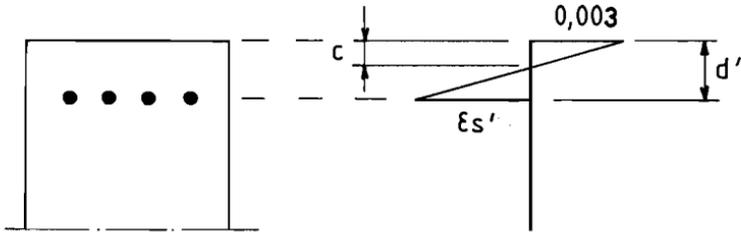


Fig. 4. Determinación de la tensión en la armadura superior para $c < d'$ (Zona I).

Si $f'_s < f_y$, se tiene la relación:

$$f'_s = E_s \varepsilon'_s \quad (54)$$

La ec. (54) se puede expresar en función de ξ .

$$f'_s = 0,003 E_s \left(\frac{\delta'}{\xi} - 1 \right) \quad (55)$$

cuya derivada es

$$\frac{df'_s}{d\xi} = -0,003 E_s \frac{\delta'}{\xi^2} \quad (56)$$

que muestra que es siempre negativa. Por otro lado si $f'_s = f_y$, esa derivada es nula. Por consiguiente dado que f'_s está en valor absoluto, el tercer término del segundo miembro de la ec. (49) se suma positivamente o es nulo, con lo cual se deduce que la derivada $d\omega_i/d\xi$ es positiva para valores de ξ entre 0 y δ' , o sea, en la zona I.

Se concluye que dentro de ese intervalo la mínima armadura se produce para el estado 0 (ver Fig. 2).

Zona II: Armadura superior comprimida e inferior traccionada

Esta situación corresponde a estados límites últimos dentro del tramo SH de la Fig. 2.

Trabajando con los valores absolutos de los esfuerzos, las ecuaciones de equilibrio (21) y (22) toman la forma

$$v_u = \phi v_c + \phi v'_s - \phi v_s \quad (57)$$

$$\mu_u = \phi \mu_c + \phi \mu'_s + \phi \mu_s \quad (58)$$

De estas ecuaciones más dos ecuaciones deducidas de la ec. (14) se despejan los valores de los esfuerzos en las armaduras, dando

$$\nu_s = \frac{1}{2} \left[\nu_c - \frac{\nu_u}{\phi} \right] + \frac{1}{1-2\delta'} \left[\frac{\mu_u}{\phi} - \mu_c \right] \quad (59)$$

$$\nu_s = \frac{1}{2} \left[\frac{\nu_u}{\phi} - \gamma_c \right] + \frac{1}{1-2\delta'} \left[\frac{\mu_u}{\phi} - \mu_c \right] \quad (60)$$

Para valores de δ' entre 0.05 y 0.20 se tiene en los puntos extremos S y H de este intervalo

$$\min \xi_S = 0.05 \quad (61)$$

$$\max \xi_S = 0.20 \quad (62)$$

$$\min \xi_H = 0.80 \quad (63)$$

$$\max \xi_H = 0.95 \quad (64)$$

Para analizar el criterio de diseño óptimo en esta zona conviene dividir el intervalo en estudio en tres partes:

- i) La armadura inferior fluye, la armadura superior no fluye.

El rango de valores de la profundidad de la fibra neutra es

$$\xi_S \leq \xi < \xi_c' \quad (65)$$

en que ξ_c' es el valor asociado al caso cuando fluye por compresión la armadura superior. Su valor es

$$\xi_c' = \frac{\delta'}{1 - \frac{\varepsilon_y}{3}} \quad (66)$$

con ε_y en ‰.

- ii) Ambas armaduras fluyen.

El rango de ξ es

$$\xi_c' \leq \xi < \xi_B \quad (67)$$

en que ξ_B corresponde al estado balanceado (la armadura inferior empieza a fluir), y tiene el valor dado por la ec. (12).

- iii) La armadura inferior no fluye, la superior fluye.

Esta situación se produce para ξ en el rango

$$\xi_B \leq \xi \leq \xi_H \quad (68)$$

A continuación se estudia cada uno de los tres casos en relación a la determinación de la armadura óptima.

Caso i)

Partiendo de la ec. (31), y haciendo un desarrollo similar al de la Zona I, se llega a la expresión

$$\frac{d\omega_t}{d\xi} = \frac{dv_s}{d\xi} + K \frac{dv_s'}{d\xi} - \frac{\omega_s'}{f_s'} - \frac{df_s'}{d\xi} \quad (69)$$

donde en este caso, $f_s = f_y$, $f_s' < f_y$ y $K = f_y/f_s' > 1$.

Las derivadas de v_s y v_s' se obtienen de las ecs. (59) y (60).

$$\frac{dv_s}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{dv_c}{d\xi} - \frac{1}{1-2\delta'} \frac{d\mu_c}{d\xi} \quad (70)$$

$$\frac{dv_s'}{d\xi} = -\frac{1}{2} \frac{dv_c}{d\xi} - \frac{1}{1-2\delta'} \frac{d\mu_c}{d\xi} \quad (71)$$

Reemplazando las derivadas de las ecs. (70) y (71) en la ec. (69), y ordenando, se llega a

$$\frac{d\omega_t}{d\xi} = -\frac{1}{2} \frac{dv_c}{d\xi} (K-1) - \frac{1}{1-2\delta'} \frac{d\mu_c}{d\xi} (K+1) - \frac{\omega_s'}{f_s'} \frac{df_s'}{d\xi} \quad (72)$$

Para rangos de δ' entre 0,05 y 0,20 y aceros A44-28 y A63-42, se puede demostrar que en el Caso i) se trabaja bajo el máximo ξ_M de la curva de interacción, lo que implica que allí tanto μ_c como v_c son crecientes y sus derivadas $d\mu_c/d\xi$ y $dv_c/d\xi$ son, por lo tanto, positivas. Por esto, los dos primeros términos del 2º miembro de la ec. (72) son negativos. Para el tercer término se analiza el signo de $df_s'/d\xi$

De la Fig. 5 se obtiene

$$f_s' = E_s \varepsilon_s' = 0,003 E_s \left(1 - \frac{\delta'}{\xi}\right) \quad (73)$$

y

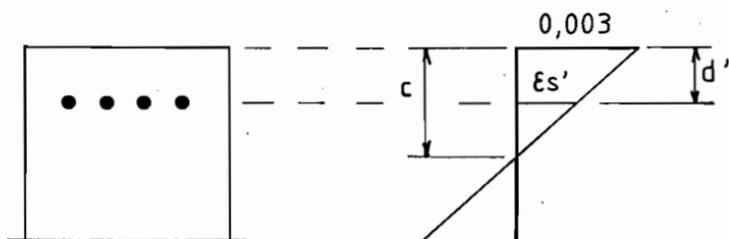


Fig. 5. Determinación de la tensión en la armadura superior para $c > d'$ (Zona II).

$$\frac{df_s'}{d\xi} = 0,003 E_s \frac{\delta'}{\xi^2} > 0 \quad (74)$$

La relación (74) indica que el 3^{er} término en la ec. (72) es también negativo.

Por lo tanto, en el primer tramo de la Zona II se tiene

$$\frac{d\omega_t}{d\xi} < 0 \quad (75)$$

Caso ii)

En este caso ambas armaduras están fluyendo (salvo el caso particular de acero A63-42 y recubrimiento $\delta' = 0,20$). Por lo tanto, salvo esto último.

$$f_s = f_y \text{ y } f_s' = f_y \quad (76)$$

con lo cual

$$\frac{df_s}{d\xi} = \frac{df_s'}{d\xi} = 0 \quad (77)$$

y, por lo tanto, de las ec. (69), (76) y (77) se obtiene

$$\frac{d\omega_t}{d\xi} = \frac{dv_s}{d\xi} + \frac{dv_s'}{d\xi} \quad (78)$$

Reemplazando el valor de las derivadas de la ecs. (70) y (71) en la ec. (78), queda

$$\frac{d\omega_t}{d\xi} = - \frac{2}{1 - 2\delta'} \frac{d\mu_c}{d\xi} \quad (79)$$

De la ec. (6) se deduce que

$$\frac{dv_c}{d\xi} > 0 \quad (80)$$

Sin embargo, el signo de la derivada $d\mu_c/d\xi$ va a depender de si el estado balanceado, que es el límite superior del Caso ii, se produce antes o después del estado de máximo momento M de la curva de interacción del hormigón, lo cual depende de las variables de diseño. Por lo tanto, se pueden presentar las siguientes situaciones:

$$\frac{dv_c}{d\mu_c} \geq 0 \quad \text{para} \quad \xi \leq \xi_M$$

$$\frac{dv_c}{d\mu_c} < 0 \quad \text{para} \quad \xi > \xi_M$$

Por lo cual, se deduce que

Si $\xi_B < \xi_M$, entonces para todo ξ , $d\mu_c/dv_c > 0$, lo que implica, por las ecs. (79) y (80), que $d\omega_t/d\xi < 0$.

Si $\xi_B > \xi_M$, entonces para $\xi < \xi_M$ se tiene $d\mu_c/dv_c > 0$ y $d\omega_t/d\xi < 0$. Por otra parte, para $\xi_M < \xi \leq \xi_B$, se tiene $d\mu_c/dv_c < 0$, lo que implica $d\omega_t/d\xi > 0$.

Caso iii)

Para este último rango se tiene

$$f_s' = f_y \text{ y } f_s < f_y$$

Para estos valores, la ecuación de la derivada de la cuantía mecánica total queda

$$\frac{d\omega_t}{d\xi} = \frac{dv_s'}{d\xi} + K \frac{dv_s}{d\xi} - \frac{\omega_s}{f_s} \frac{df_s}{d\xi} \quad (81)$$

en este caso

$$K = \frac{f_y}{f_s} > 1 \quad (82)$$

Reemplazando los valores de $dv_s/d\xi$ y $dv_s'/d\xi$ de las ecs. (70) y (71) en la ec. (81), se tiene ordenando la expresión

$$\frac{d\omega_t}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{dv_c}{d\xi} (K - 1) - \frac{1}{1 - 2\delta} \frac{d\mu_c}{d\xi} (K + 1) - \frac{\omega_s}{f_s} \frac{df_s}{d\xi} \quad (83)$$

El límite inferior de este dominio es el estado balanceado; por lo tanto, habrá que distinguir aquellos puntos en que el estado de momento máximo M pertenece al dominio.

Para determinar el signo de $df_s/d\xi$ consideremos la Fig. 6.

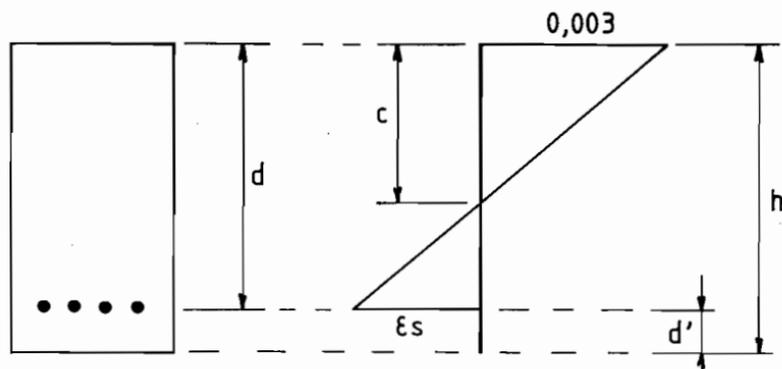


Fig. 6. Determinación de la tensión en la armadura inferior para $d' < c < d$ (Zona II).

De la Fig. 6 se deduce que

$$f_s = E_s \xi_s = 0,003 E_s \left[\frac{1}{\xi} (1 - \delta') - 1 \right] \quad (84)$$

luego

$$\frac{df_s}{d\xi} = -0,003 E_s \frac{1 - \delta'}{\xi^2} < 0 \quad (85)$$

ya que $\delta' < 1$.

Tomando en cuenta la ec. (85) y que $dv_c/d\xi > 0$ y $K > 1$, se deduce que el primer y tercer término de la ec. (83) son sumandos positivos. En cambio, el segundo término puede cambiar de signo si el estado M se encuentra dentro del dominio considerado, o sea, si $\xi_M > \xi_B$. En este caso, para todos los valores de ξ en el rango $\xi_B \leq \xi < \xi_M$, se tiene $d\mu_c/dv_c > 0$, lo que conduce a $d\mu_c/d\xi > 0$, y el segundo término de la ec. (83) se restaría: en cambio, para $\xi > \xi_M$ ese término se suma igual que los demás y $d\omega_t/d\xi > 0$. Se puede demostrar que para los valores usuales de los parámetros de diseño, $d\omega_t/d\xi$ resulta positivo para el caso en que se resta el segundo término de la ec. (83).

En resumen en todos los estados del caso iii se tiene $d\omega_t/d\xi > 0$.

Zona III: ambas armaduras en compresión

Las tensiones en las armaduras cumplen las condiciones

$$f_s' = f_y \text{ y } f_s \leq f_y \quad (86)$$

para un rango de la fibra neutra dado por $\xi_H < \xi \leq \xi_F$.

Considerando el sentido de los esfuerzos en esta zona, las ecuaciones de equilibrio en valores absolutos son:

$$v_u = \phi v_c + \phi v_s + \phi v_s' \quad (87)$$

$$\mu_u = \phi \mu_c - \phi \mu_s + \phi \mu_s' \quad (88)$$

De las ecs. (87) y (88) y de la relación entre los esfuerzos en las armaduras (ec. 14) resultan las siguientes expresiones para los refuerzos axiales en las armaduras.

$$v_s' = \frac{1}{2} \left[\frac{v_u}{\phi} - v_c \right] + \frac{1}{1 - 2\delta'} \left[\frac{\mu_u}{\phi} - \mu_c \right] \quad (89)$$

$$v_s = \frac{1}{2} \left[\frac{v_u}{\phi} - v_c \right] - \frac{1}{1 - 2\delta'} \left[\frac{\mu_u}{\phi} - \mu_c \right] \quad (90)$$

La derivada de la cuantía total tiene, para este caso, la siguiente expresión

$$\frac{d\omega_t}{d\xi} = \frac{dv_s'}{d\xi} + K \frac{dv_s}{d\xi} - \frac{\omega_s}{f_s} \frac{df_s}{d\xi} \quad (91)$$

$$\text{con } K = \frac{f_y}{f_s} \geq 1 \quad (92)$$

A partir de las ecs. (89) y (90) se calculan las derivadas de v_s y v_s'

$$\frac{dv_s'}{d\xi} = -\frac{1}{2} \frac{dv_c}{d\xi} - \frac{1}{1 - 2\delta'} \frac{d\mu_c}{d\xi} \quad (93)$$

$$\frac{dv_s}{d\xi} = -\frac{1}{2} \frac{dv_c}{d\xi} + \frac{1}{1 - 2\delta'} \frac{d\mu_c}{d\xi} \quad (94)$$

Reemplazando los valores de las derivadas de las ecs. (93) y (94) en la ec. (91) y ordenando se obtiene:

$$\frac{d\omega_t}{d\xi} = -\frac{1}{2} \frac{dv_c}{d\xi} (K+1) + \frac{1}{1 - 2\delta'} \frac{d\mu_c}{d\xi} (K-1) - \frac{\omega_s}{f_s} \frac{df_s}{d\xi} \quad (95)$$

Esta zona está lejos por encima del máximo de la parábola de interacción del hormigón solo, luego se tiene

$$\frac{d\mu_c}{d\xi} < 0 \quad (96)$$

De esta manera, los dos primeros sumandos de la ec. (95) resultan negativos. Para el tercer término se estudia la variación de la tensión de compresión de la armadura inferior.

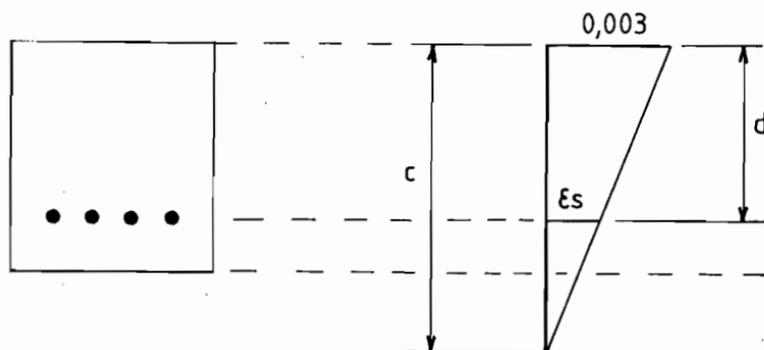


Fig. 7. Determinación de la tensión en la armadura inferior para $c > d$ (Zona III).

De la Fig. 7 se obtiene

$$f_s = E_s \varepsilon_s = 0,003 E_s \left[1 - \frac{1}{\xi} (1 - \delta') \right] \quad (97)$$

De aquí se calcula la derivada

$$\frac{df_s}{d\xi} = 0,003 E_s \frac{1 - \delta'}{\xi^2} \quad (98)$$

por lo cual se deduce que $df_s/d\xi$ es siempre positivo.

En conclusión, se tiene que para esta zona en que ambas armaduras están comprimidas la derivada

$$\frac{d\omega_r}{dt} < 0 \quad (99)$$

9. CRITERIOS DE DISEÑO ÓPTIMO

De acuerdo con los resultados de los signos de la derivada de la armadura total en las distintas regiones definidas para los estados límites últimos, se puede deducir los criterios de dimensionamiento óptimo. Estos se describen a continuación.

Zona I: ambas armaduras traccionadas

Cubre el rango de deformaciones entre O y S (Fig. 2). En esta zona la derivada de $d\omega_t/d\xi$ es siempre positiva. Para el análisis del diseño óptimo es necesario dividir la zona en dos subzonas, Ia e Ib, a partir de una línea trazada desde el origen O con dirección θ (ver Fig. 8). Considerando el signo de la derivada se infiere que la profundidad de la fibra neutra debe ser lo más pequeña posible para obtener la menor armadura total ω_t . De acuerdo con esto, en la subzona Ia el diseño óptimo se encuentra en el punto O, donde el hormigón no aporta resistencia y sólo actúan ambas armaduras con su tensión de fluencia. Por ejemplo, en la Fig. 8, dada la sollicitación A_1 los esfuerzos de diseño óptimo en las armaduras, que en este caso son iguales a las respectivas cuantías por ser ambas tensiones iguales a las de fluencia, son OA_1 para la armadura inferior y A_1A para la superior.

En la subzona Ib se puede deducir gráficamente, por la orientación que deben tener las rectas correspondientes a las resistencias de las armaduras, que es imposible alcanzar el estado O. Luego el criterio es alcanzar el punto asociado a la menor profundidad de fibra neutra posible. Por la construcción de las rectas representativas de los esfuerzos en las armaduras en esta zona, lo anterior se logra dimensionando sólo con la armadura inferior. En la Fig. 8, el diseño óptimo desde la sollicitación B' alcanza el estado límite último B'_1 .

Zona II: armaduras inferior traccionada y superior comprimida

Esta zona está comprendida entre los puntos S y H del diagrama de interacción del hormigón solo (ver Figs. 2 y 8). De acuerdo con los resultados del análisis del signo de $d\omega_t/d\xi$ hecho anteriormente, se resumen las siguientes conclusiones:

a) Si $\xi_M > \xi_B$

Entonces se obtiene lo siguiente para los diferentes intervalos de los valores de ξ :

$$\xi_S \leq \xi < \xi_c' : \frac{d\omega_t}{d\xi} < 0$$

$$\xi_c' \leq \xi < \xi_B : \frac{d\omega_t}{d\xi} < 0$$

$$\xi_B \leq \xi < \xi_M : \frac{d\omega_t}{d\xi} < 0$$

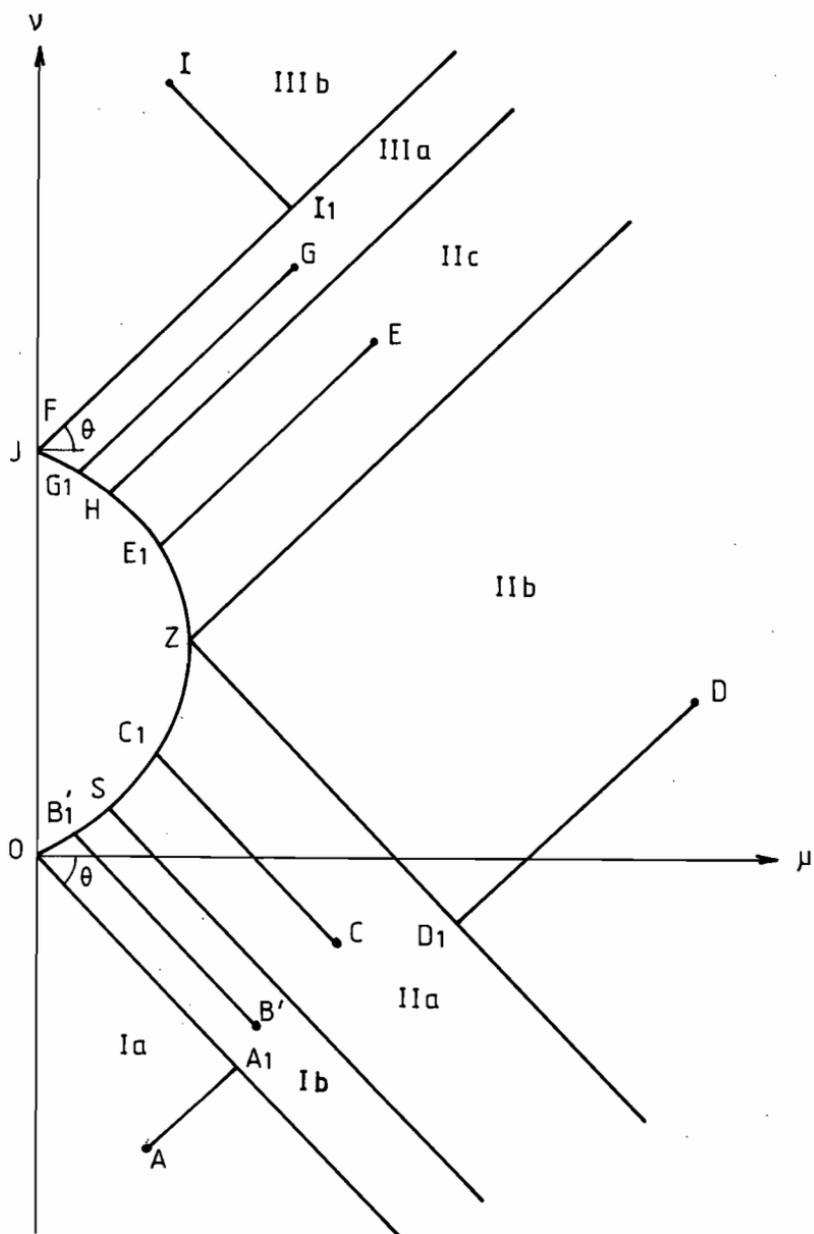


Fig. 8. Criterios de dimensionamiento óptimo.

$$\xi_M \leq \xi \leq \xi_H : \frac{d\omega_t}{d\xi} > 0$$

b) Si $\xi_M < \xi_B$

$$\xi_S \leq \xi < \xi_{c1} : \frac{d\omega_t}{d\xi} < 0$$

$$\xi_{c'} \leq \xi < \xi_M : \frac{d\omega_t}{d\xi} < 0$$

$$\xi_M \leq \xi \leq \xi_B : \frac{d\omega_t}{d\xi} > 0$$

$$\xi_B \leq \xi \leq \xi_H : \frac{d\omega_t}{d\xi} > 0$$

De acuerdo con lo anterior, se puede afirmar que si se define un estado límite último Z, el que tiene asociado una profundidad relativa de la fibra neutra ξ_z , tal que:

$$\xi_z = \min(\xi_B, \xi_M) \quad (100)$$

se tiene para toda la Zona II:

$$\xi_S \leq \xi < \xi_z : \frac{d\omega_t}{d\xi} < 0$$

$$\xi_z \leq \xi \leq \xi_H : \frac{d\omega_t}{d\xi} > 0$$

Como conclusión se tiene que en el intervalo SZ conviene aumentar la profundidad de la fibra neutra tendiendo hacia el estado Z. En el intervalo ZH conviene reducir la profundidad de la fibra neutra tendiendo también al estado Z.

Sin embargo, se puede observar en la Fig. 3 que existen áreas en la Zona II con vectores de sollicitación que no pueden ser alcanzados por el estado Z, dada la inclinación y orientación obligadas que tienen los vectores de esfuerzos en las armaduras. Por este motivo se definen tres subzonas IIa, IIb y IIc, mostradas en la Fig. 8, definidas trazando por Z líneas paralelas a las direcciones de los esfuerzos en las armaduras superior e inferior, respectivamente.

Subzona IIa: El diseño óptimo se obtiene dimensionando solamente con la armadura inferior, para alcanzar de esta manera el estado posible más cercano a Z. Por ejemplo, en la Fig. 8 desde la sollicitación C se diseña hasta alcanzar el estado C_1 con CC_1 paralela a la dirección del esfuerzo de la armadura inferior.

Subzona IIb. Corresponde a todos los vectores de sollicitación que pueden ser alcanzados desde el estado óptimo Z. Por ejemplo, desde la sollicitación D (Fig. 8) se diseña con los esfuerzos ZD_1 para la armadura inferior y D_1D para la superior.

Si el estado óptimo Z corresponde al B, se diseña fijando el estado balanceado. Si, por el contrario, el óptimo corresponde al estado M, se diseña fijando el estado de máximo esfuerzo de momento en el hormigón.

Subzona IIc. En este caso se asegura de dimensionar la sección de hormigón armado con la posición de la fibra neutra más cercana posible al estado Z, lo que conduce a que el diseño óptimo se realice sólo con la armadura superior. Por ejemplo, el diseño $E E_1$ de la Fig. 8.

Zona III: ambas armaduras en compresión

Los estados límites últimos de diseño correspondientes a esta zona van desde el estado H hasta el F (ver Figs. 2 y 8).

El análisis de $d\omega_i/d\xi$ en esta zona mostró que esa derivada es siempre negativa; por lo tanto, el óptimo se encuentra para el mayor valor de ξ posible. Dadas las características de la construcción de los esfuerzos en las armaduras de esta zona, para lograr el objetivo anterior, conviene derivarla en dos subzonas: IIIa y IIIb (ver Fig. 8), por una recta de inclinación θ trazada desde el punto F.

En la subzona IIIa el diseño óptimo se logra disponiendo sólo armadura superior, ya que esto asegura el máximo ξ alcanzable, de esta manera el diseño óptimo está entre H y F y depende del esfuerzo de sollicitación. En la Fig. 8 se muestra el diseño óptimo GG_1 para la subzona IIIa.

En la subzona IIIb el diseño se fija en el estado F, en el cual ambas armaduras fluyen en compresión. Como ejemplo se muestra el diseño óptimo $II_1 F$ de la Fig. 8.

A partir de los resultados obtenidos, esquematizados en la Fig. 8, se puede observar que existen áreas que a pesar de pertenecer a distintas zonas, poseen igual criterio de diseño óptimo. Esto permite fusionar la subzona Ib con la IIa, y la subzona IIc con la IIIa, obteniéndose un esquema más simple de dimensionamiento, el cual se muestra en la Fig. 9, donde se definen 5 zonas asociadas a diferentes criterios de dimensionamiento de las armaduras.

Es importante remarcar que todos los criterios de dimensionamiento óptimo señalados conducen a armaduras en estado de fluencia, lo cual concuerda con el concepto de que una armadura óptima debe estar sometida al máximo de tensión. En efecto, en los estados O, Z y F ambas

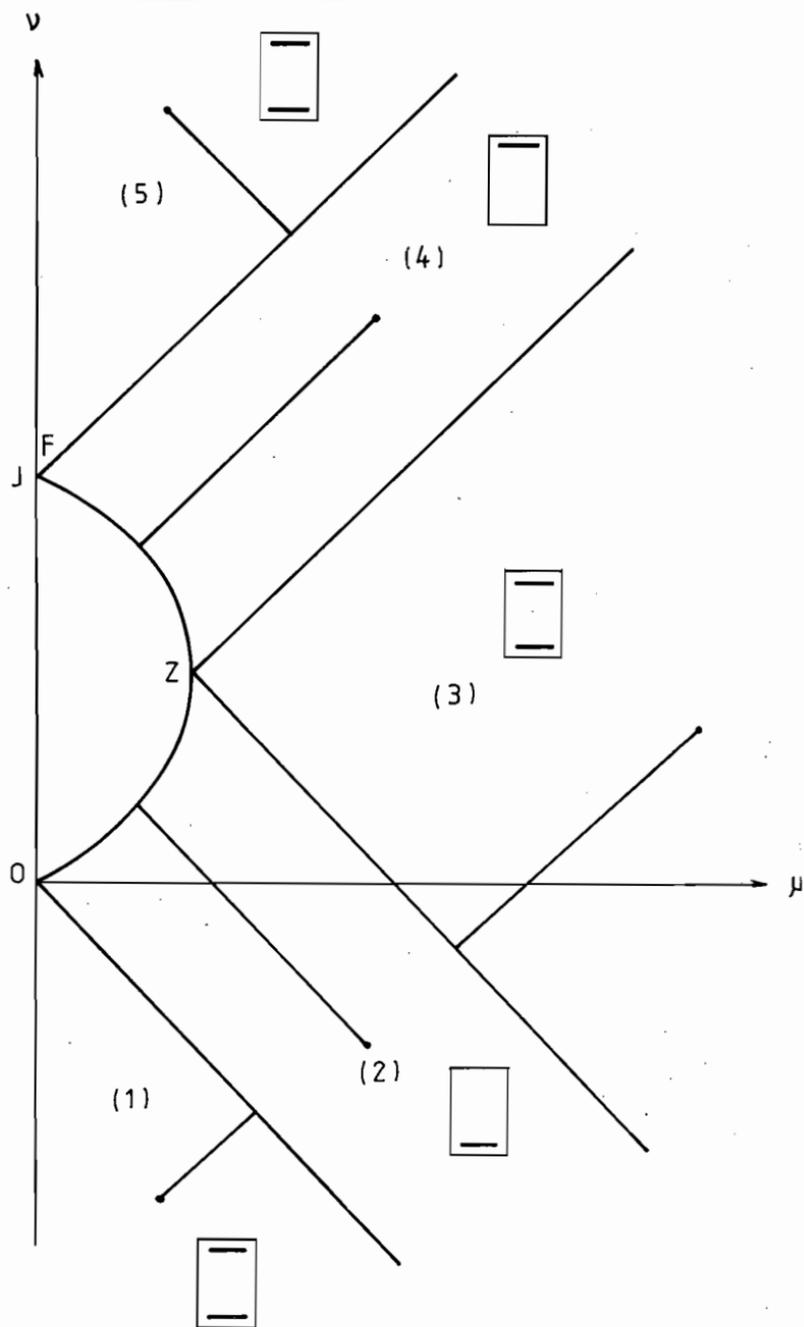


Fig. 9. Criterios y zonas definitivas de dimensionamiento óptimo.

armaduras fluyen, y en los intervalos OZ y ZF se dimensiona justamente con la armadura que está en fluencia.

Esta característica de los diseños óptimos tiene una implicación analítica. Se trata de que por estar las armaduras fluyendo en los diseños óptimos, los valores de las cuantías mecánicas ω_s y ω'_s son iguales, respectivamente, a los esfuerzos adimensionales en las armaduras v_s y v'_s de acuerdo con las ecs. (29) y (30). De este modo, la construcción geométrica de los esfuerzos en las armaduras, por ejemplo, en las Figs. 8 ó 9 da directamente las cuantías de diseño. Ellas corresponden, en realidad, a las proyecciones verticales de esos vectores de esfuerzos; sin embargo, como las inclinaciones de esos vectores son fijas: θ y $\theta' = -\theta$, las magnitudes de los vectores mismos son proporcionales a las cuantías de armaduras.

La propiedad anterior tiene la ventaja que permite inspeccionar geoméricamente la búsqueda de los dimensionamientos óptimos en el diagrama de interacción.

Las rectas que separan los diferentes dominios de la Fig. 9 pasan, respectivamente, por un punto: O, Z o F y tienen una inclinación fija: m o m' , luego se expresan por ecuaciones de la forma

$$v - v_0 = m (\mu - \mu_0) \quad (101)$$

10. DESARROLLO DE ÁBACOS DE DIMENSIONAMIENTO

Las soluciones de dimensionamiento óptimo, sintetizadas en la Fig. 9, tienen las siguientes características:

- En las regiones 1, 3 y 5 la solución es un punto fijo: O, Z o F, respectivamente. El dimensionamiento óptimo consta de armadura superior e inferior.
- En las regiones 2 y 4 la solución se produce en estados límites últimos variables: en OZ o ZF respectivamente. El dimensionamiento óptimo consiste en sólo una armadura: inferior en 2 o superior en 4.
- En todos los casos de dimensionamiento óptimo las armaduras se encuentran en estado de fluencia.

En el desarrollo matemático para la búsqueda de la armadura óptima en cada una de las 3 grandes zonas de diseño: I, II y III, se encontraron relaciones a partir de las ecuaciones de equilibrio que ligan los esfuerzos que toman las armaduras (v_s, v'_s) con los que toman el hormigón (v_c, μ_c) y los esfuerzos solicitantes (v_u, μ_u).

Todas esas ecuaciones son de la forma:

$$v_s = a v_u + b v_c + c \mu_u + d \mu_c \quad (102)$$

Ver la ecs. (34) y (35) para la zona I, (56) y (57) para la zona II, y (89) y (90) para la zona III. Como las armaduras están en fluencia en el diseño óptimo, en la ec. (102) se puede reemplazar ν_s por la cuantía ω_s , y queda

$$\omega_s = a\nu_u + b\nu_c + c\mu_u + d\mu_c \quad (103)$$

donde ν_u y μ_u son siempre datos.

Para determinar las armaduras óptimas en forma analítica, se aplican las ecuaciones del tipo (103) para ω_s y ω_s' en las diferentes zonas I a III. Ahora bien, considerando los diferentes criterios de dimensionamiento óptimo descritos en la Fig. 9, se procede en detalle de la siguiente manera.

Si el óptimo está en O, Z o F, los valores de ν_c y μ_c son fijos y quedan despejados directamente los valores de las cuantías óptimas ω_s y ω_s' .

Si se trabaja en las zonas 2 ó 4, los valores de ν_c y μ_c se desconocen porque no está determinado el estado límite último del diseño óptimo. Sin embargo, ellos presentan sólo una incógnita, ya que están relacionados entre sí de acuerdo con la ec. (8). Por otro lado, en esas zonas ya sea ω_s o ω_s' es nula, con lo cual al aplicar dos ecuaciones del tipo (103), existen sólo 2 incógnitas: ω_s o ω_s' y ν_c .

Como alternativa a las soluciones analíticas se pueden generar ábacos con las ecs. del tipo (103) fijando valores de los pares de cuantías ω_s y ω_s' , despejando los esfuerzos ν_u y μ_u para cada par de esos valores fijos. Se recorren con este procedimiento las zonas 1 a 5, aplicando en cada una de ellas los correspondientes criterios de dimensionamiento óptimo. Los puntos (ν_u , μ_u) encontrados se unen formando curvas de dimensionamiento óptimo asociadas a valores fijos de las cuantías.

En las zonas 1, 3 y 5 se determinó que el estado de diseño óptimo es, respectivamente, único, por lo que los esfuerzos en el hormigón no varían en cada caso. De esta manera, las ecuaciones del tipo (103) se reducen a relaciones lineales entre ν_u y μ_u al fijar los valores de las cuantías.

En las zonas 2 y 4, una de las ecuaciones (103) tiene el primer miembro nulo. La fibra neutra no tiene un valor fijo en el óptimo por lo que los esfuerzos en el hormigón varían y las relaciones (103) son no lineales para cuantías dadas.

Con el procedimiento recién descrito se han dibujado ábacos de dimensionamiento óptimo como el de la Fig. 10. Cada uno de ellos está asociado a una terna de valores de los parámetros: calidad del acero f_y , calidad del hormigón f'_c y recubrimiento relativo δ' . El número de ábacos elaborados cubre los valores más usuales de esos parámetros y todos ellos se incluyen en la Ref. 16.

El rango de cuantías mecánicas de cada ábaco se ha elegido de manera

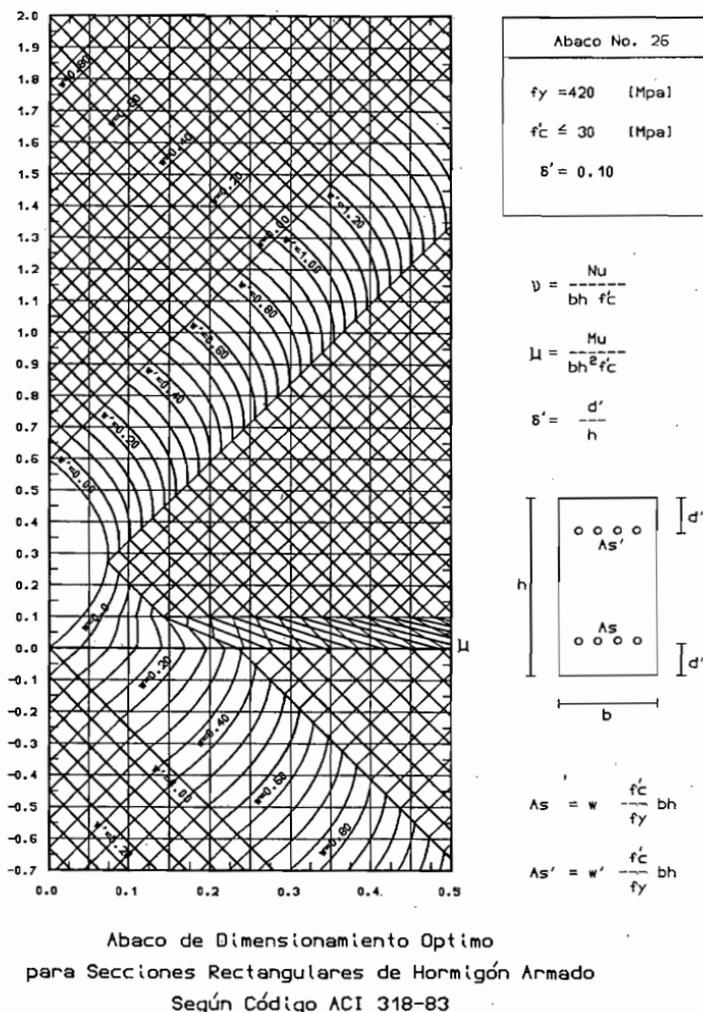


Fig. 10. Abaco de dimensionamiento óptimo.

de no exceder cuantías geométricas límites habituales. En la Ref. 16 se describe en detalle la construcción de los ábacos.

El uso de los ábacos es muy simple. Dados los parámetros f_s , f'_s y δ' , se entra al ábaco correspondiente con las dimensiones de la sección y los valores de las cargas mayoradas ν_u y μ_u y se determinan, en la intersección de estos últimos, las cuantías ω_s y ω'_s (Fig. 10).

11. LÍMITES DE CUANTÍAS DE ARMADURAS

Los valores de áreas de armaduras resultantes de los ábacos deben ser cotejados con las cotas para cuantías de armaduras establecidas en el código ACI-83. Si los resultados no satisfacen alguna de las restricciones de cota, deben modificarse de acuerdo con ello.

Las restricciones relacionadas con cuantías mínimas y máximas del ACI-83 son las siguientes:

- a) En elementos sujetos a flexión pura o a una combinación de flexión y esfuerzo axial, cuando $\phi P_n < \min(0,10 f'_c A_g, \phi P_b)$, la cuantía de armadura de tracción ρ ($\rho = A_s / bd$) debe ser menor o igual a 0,75 de la cuantía ρ_b correspondiente a la condición de deformación balanceada para la sección sometida a flexión sin esfuerzo axial. En elementos con refuerzo de compresión, la parte de ρ_b que iguala a la armadura de compresión no necesita reducirse por el factor 0,75.
- b) En cualquier sección donde se requiera una armadura positiva por análisis, la cuantía prevista no debe ser menor que

$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y} \quad (104)$$

donde f_y está medido en Kg/cm².

Alternativamente, el área de armadura provista en cualquier sección, positiva o negativa, deberá ser al menos un tercio mayor que la requerida por análisis.

- c) En elementos en compresión reforzados con zunchos

$$\phi P_{n(\max)} = 0,85 \phi [0,85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \quad (105)$$

Si el refuerzo es con estribos

$$\phi P_{n(\max)} = 0,80 \phi [0,85 f'_c (A_s - A_{st}) + f_y A_{st}] \quad (106)$$

donde A_g es el área de la sección de hormigón y A_{st} es el área total de armadura longitudinal.

- d) La cuantía ρ_{st} ($\rho_{st} = A_{st}/A_g$) de la armadura longitudinal para elementos en compresión debe satisfacer los límites siguientes:

$$0,01 \leq \rho_{st} \leq 0,08 \quad (107)$$

RESTRICCIONES b) y d)

Las restricciones b) y d) son fáciles de aplicar cuando el dimensionamiento óptimo del ábaco no satisfaga alguna de ellas en el caso que corresponda. Para ello, simplemente la sección de armaduras calculada se reemplaza

por el valor límite atingente, pudiéndose en el caso b) elegir una de las dos alternativas.

RESTRICCIÓN a)

Estas restricciones están dirigidas a proveer ductilidad a las vigas. Para una sección con armadura de tracción solamente, la cuantía máxima de esa armadura es

$$\rho_{\text{máx}} = 0,75 \rho_b \quad (108)$$

Si además existe armadura de compresión, la cuantía máxima de tracción es

$$\rho_{\text{máx}} = 0,75 \rho_b + \rho' \frac{f'_s}{f_y} \quad (109)$$

siendo ρ' es la cuantía de la armadura de compresión y f'_s la tensión en esa armadura.

La cuantía ρ_b de la armadura de tracción en condiciones de deformación balanceada bajo la flexión sin carga axial tiene la expresión

$$\rho_b = 0,85 \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_y}{0,003}} \quad (110)$$

Si la armadura óptima resultante del ábaco es mayor que $\rho_{\text{máx}}$ se puede proceder de la siguiente manera: si la armadura es sólo de tracción se deberá incorporar acero en compresión; si existen ambas armaduras, éstas se deberán modificar. En ambos casos, el diseño modificado deberá satisfacer la ecuación (109).

El procedimiento para resolver lo anterior puede ser el siguiente. La sección de hormigón armado se descompone en dos. La primera corresponde a una pieza que posee sólo armadura de tracción, la cual toma el esfuerzo axial de diseño $P_n = P_u/\phi$ y una parte del momento de diseño $M_n = M_u/\phi$. La sección 2 posee armaduras de tracción y compresión y resiste la parte de M_n que no toma la sección 1 (ver Fig. 11).

En el sistema 1 se impone la condición $\rho = \rho_{\text{máx}} = 0,75 \rho_b$. Cabe notar que para el caso de esfuerzo normal nulo, la fibra neutra se incrementa exactamente en $c = 0,75 c_b$, que corresponde a la profundidad límite de la fibra neutra para la restricción de ductilidad en flexión simple. A continuación se mostrará que si $P_u \neq 0$ y $\rho > \rho_{\text{máx}}$, la profundidad de la fibra neutra c_t aumenta con P_u , pero, por otro lado, se incorpora acero a la compresión.

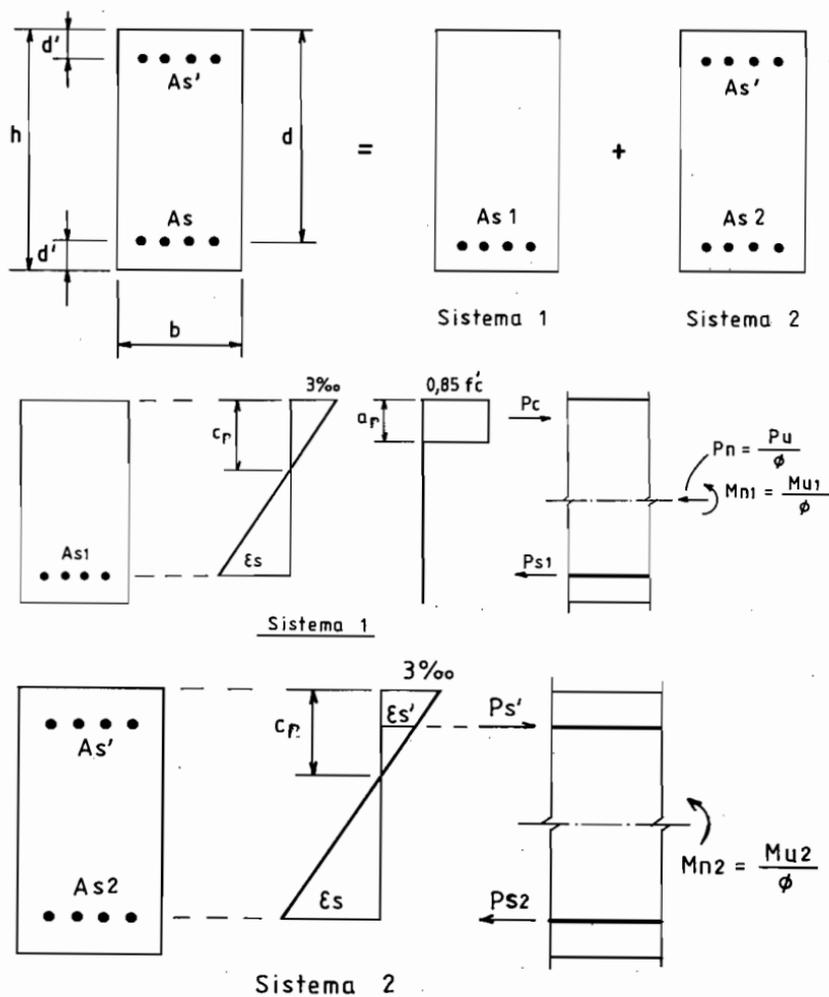


Fig. 11. Procedimiento para satisfacer la restricción de ductilidad en vigas.

Sistema 1

De la Fig. 11 las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos y momentos son:

$$P_c - P_{s1} = P_u / \phi \quad (111)$$

$$P_c \left(\frac{h}{2} - \frac{a_r}{2} \right) + P_{s1} \left(\frac{h}{2} - d' \right) = M_{u1} / \phi \quad (112)$$

donde

$$P_c = 0,85 f'_c b \beta_1 c_r \quad (113)$$

y

$$P_{s1} = A_{s1} f_y = 0,75 \rho_b b d f_y \quad (114)$$

De las ecuaciones (111), (113) y (114) se obtiene la profundidad de la fibra neutra c_r .

$$c_r = \frac{0,75 \rho_b f_y b d + P_u/\phi}{0,85 f'_c b \beta_1} \quad (115)$$

lo que muestra que c_r aumenta con P_u , y que es proporcional a $0,75 \rho_b$, si $P_u = 0$.

Obtenido c_r , el valor de M_u/ϕ se obtiene directamente de la ec. (112). Con este valor, se calcula M_{u2}/ϕ .

$$\frac{M_{u2}}{\phi} = \frac{M_u}{\phi} - \frac{M_{u1}}{\phi} \quad (116)$$

que es la acción sobre el sistema 2.

Sistema 2

Las ecuaciones de equilibrio son

$$P_{s2} = P_s' \quad (117)$$

$$P_{s2} (h - 2d') = \frac{M_{u2}}{\phi} \quad (118)$$

la ecuación (117) conduce a

$$A_{s2} f_y = A_s' f_s' \quad (119)$$

de donde

$$A_{s2} = A_s' \frac{f_s'}{f_y} \quad (120)$$

De la ec. (118) se obtiene

$$A_{s2} = \frac{M_{u2}/\phi}{(h - 2d') f_s'} \quad (121)$$

Igualando las ecuaciones (120) y (121) se llega a

$$A_s' = \frac{M_{u2}/\phi}{(h - 2d') f_s'} \quad (122)$$

que determina la armadura de compresión.

La armadura de tracción se obtiene sumando los valores de los sistemas 1 y 2.

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 0,75 \rho_b bd + A_s' \frac{f_s'}{f_y} \quad (123)$$

RESTRICCIÓN C)

Esta restricción establece una carga axial máxima de cálculo ϕP_n (máx). Si el diseño óptimo del ábaco produce un $\phi P_n = P_u$ mayor que el valor máximo de ecs. (105) ó (106), es necesario aumentar la armadura total A_{st} para elevar el valor de ϕP_n (máx) hasta igualarlo con la carga aplicada P_u . De esta manera para el caso, por ejemplo, de la ec. (106) se impone

$$\phi P_{n(máx)} = P_u = 0,80 \phi [0,85 f_c' (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \quad (124)$$

De aquí se obtiene el área total de armaduras necesaria

$$A_{st} = \frac{1}{f_y - 0,85 f_c'} \left(\frac{P_u}{0,80 \phi} - 0,85 f_c' A_g \right) \quad (125)$$

Las áreas de armaduras obtenidas del ábaco se puede amplificar proporcionalmente hasta obtener A_{st} , manteniendo su distribución original. Por supuesto que en esta operación es necesario verificar si se satisface la restricción de cota máxima del punto d). En caso contrario, habría que aumentar, además, la sección de hormigón.

12. EJEMPLOS

A continuación se presenta un par de ejemplos que se refieren al dimensionamiento óptimo de una viga y de una columna de secciones rectangulares.

Se aplica el ábaco de dimensionamiento óptimo mostrado en la Fig. 10. En él, las características de entrada son: $f_y = 420 \text{ MP}_a$ (4200 kg/cm^2). $f_c' = 30 \text{ MP}_a$ (300 kg/cm^2) y $\delta' = 0,1$.

EJEMPLO 1

Dimensionamiento de una viga

Dimensiones de la sección	: $b = 25 \text{ cm}$, $h = 40 \text{ cm}$, $d' = 4 \text{ cm}$
Esfuerzos solicitantes	: $P_u = 0$, $M_u = 2400 \text{ T cm}$ $v_u = 0$, $\mu_u = 0,2$
Resultados del ábaco	: $\omega_s = 0,315$, $\omega_s' = 0$ $A_s = 22,5 \text{ cm}^2$, $A_s' = 0 \text{ cm}^2$

Verificación de los límites de cuantías para vigas

$$\text{Diseño : } \rho_s = \frac{A_s}{A_g} = \frac{22,5}{1000} = 0,0225$$

$$\rho_{\min} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{4200} = 0,0033 < \rho_s$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E} = \frac{4200}{2,1 \times 10^6} = 0,002$$

De la ec. (110) se obtiene

$$\rho_b = 0,031$$

$$0,75 \rho_b = 0,023 > \rho_s$$

Luego, el diseño encontrado satisface las restricciones de cota.

EJEMPLO 2

Dimensionamiento de una columna

Dimensiones de la sección : $b = 40 \text{ cm}$, $h = 50 \text{ cm}$, $d' = 5 \text{ cm}$

Esfuerzos solicitantes : $P_u = 50 \text{ T}$, $M_u = 2000 \text{ T cm}$

$$\nu_u = 0,83, \mu_u = 0,067$$

Resultados del ábaco

$$\omega_s = 0,055, \omega_s' = 0,28$$

$$A_s = 7,86 \text{ cm}^2, A_s' = 40,0 \text{ cm}^2$$

$$A_{st} = A_s + A_s' = 47,86 \text{ cm}^2,$$

$$\rho_{st} = 0,024$$

Luego ρ_{st} satisface las restricciones de cota $0,01 \leq \rho_{st} \leq 0,08$

Verifiquemos la restricción c). De la ec. (106) resulta

$$\phi P_{n(\text{máx})} = 391,4 \text{ T} < P_u$$

Luego, hay que aumentar la armadura total según la ec. (125). Se obtiene de allí

$$A_{st} = 97,0 \text{ cm}^2$$

De aquí, las nuevas armaduras son

$$A_s = 7,86 \cdot \frac{97,0}{47,86} = 15,9 \text{ cm}^2$$

$$A_s' = 40,0 \cdot \frac{97,0}{47,86} = 81,1 \text{ cm}^2$$

La cuantía total es $\rho_{st} = 0,0485$ que cumple las restricciones de cota y es un valor aceptable con respecto a la cota superior aun cuando haya traslapes de armaduras.

13. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo se ha hecho un desarrollo analítico de la búsqueda de la armadura mínima requerida por secciones rectangulares de hormigón armado sometidas a flexión compuesta recta. El estudio ha seguido las prescripciones del código ACI 318-83, que es la base de la norma chilena de hormigón armado, actualmente en estudio.

Dada su naturaleza analítica, se pretende que este estudio sea una contribución a la teoría del diseño en hormigón armado.

El enfoque utilizado permite obtener una visión gráfica y sencilla, a través de la curva de interacción, de los estados límites últimos que se pueden alcanzar para una sollicitación dada.

Para facilitar las aplicaciones prácticas de dimensionamiento óptimo de armaduras, se han construido ábacos que cubren los parámetros de dimensionamiento más usuales.

Tanto el estudio analítico como los ábacos se pueden extender para incluir directamente las restricciones de cotas de valores de armaduras prescritas en el ACI 318-83. En este trabajo, esas cotas se tratan externamente. Por otro lado, la extensión se puede hacer para incluir las prescripciones del Apéndice A del ACI 318-83 para el diseño sismorresistente.

14. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Fondo Nacional de Ciencias y Tecnología, FONDECYT, por el financiamiento de este trabajo a través del proyecto 1195/88.

REFERENCIAS

1. CILLEY, F. H. *The Exact Design of Statically Indeterminate Frameworks. An Exposition of its Possibility and Futility*, ASCE Trans., Vol. 43, pp. 353-407, 1900.
2. MICHELL, A.G.M. *The Limits of Economy of Material in Framed Structures*, *Philosophical Magazine* (Series G). Vol. 8, N° 47, pp. 589-597, 1904.

3. SHANLEY, F.R. *Weight-Strength Analysis of Compression Structures*, 2nd ed., Dover, New York, 1960.
4. LIVESLEY, R.K. *The Automatic Design of Structural Frames*, J. Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 9, Pt. 3, pp. 257-278, 1956.
5. SCHMIT, L.A. *Structural Design by Systematic Synthesis*. Proc. 2nd Nat. Conf. on Electronic Computation, Struct. Div., ASCE, Pittsburg, pp. 105-132, 1960.
6. MORAN, F. *Cálculo de Secciones de Hormigón Armado Sometidas a Solicitaciones Normales en el Estado Límite Último*. Monografías del Instituto Torroja. N° 304, Madrid, 1972.
7. CAPRA, A. et M. HAUTCOFUR. *Calcul en Flexion Simple ou Composé a l'état Limite Ultime des Sections Rectangulaires en Béton Armé*, Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, N° 375, 1979.
8. SANTOS, L. *Cálculo de Concreto Armado*. Edit. Edgard Blucher, São Paulo, 1977.
9. SPUNT, L. *Optimum Structural Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
10. GALLAGHER, R.H. and O.C. ZIENKIEWICZ (edit.). *Optimum Structural Design*. Chapter 15: Reinforced Concrete Design, by D. Bond, J. Wiles and Sons, New York, 1973.
11. CASSIS, J. *Métodos de Dimensionamiento Óptimo en Estructuras de Hormigón Armado*. Proc. MECOM 89. X Congreso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Porto, Portugal, 1989.
12. American Concrete Institute, *Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-83)*. Detroit, Michigan, Nov. 1983.
13. CEB FIP. *Recommendations Internationales pour le Calcul et l'Execution des Ouvrages en Béton Armé*, Paris, 1970.
14. CASSIS, J. *Dimensionamiento Óptimo de Secciones Rectangulares de Hormigón Armado en Flexión Compuesta*, Actas 1^{as} Jornadas Chilenas del Hormigón Estructural. Vol. 2, Santiago, 1982.
15. IRRIBARRA, G. y J. CASSIS. *Dimensionamiento Óptimo de Secciones de Hormigón Armado en Flexión Compuesta Recta*. Publ. SES I 5/84 (194). Depto. de Ingeniería Civil, Universidad de Chile, 1984.
16. SCHERER, H. *Dimensionamiento Óptimo de Secciones de Hormigón Armado en Flexión Compuesta Recta según el código ACI 318-83*. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil, Depto. de Ingeniería Civil, Universidad de Chile, 1991.