UN MÉTODO NUEVO PARA RESOLVER LAS ECUACIONES

DEL TERCER GRADO

El método nuevo que nos proponemos esplicar en el presente trabajo, consiste en trasformar la ecuacion del tercer grado en otra del cuarto, introduciendo una raíz nueva 4∂ que se determina despues convenientemente.

Sea la ecuacion propuesta en la forma reducida

$$(1) \qquad x^3 + 3px + 2q = 0. \ (*)$$

La multiplicamos por $x - 4\partial$, (*) siendo ∂ un número cualquiera, i resulta

$$(2) \qquad x^4 - 4\partial x^3 + 3px^2 + (2q - 12p\partial)x - 8q\partial = 0$$

Reduciendo la ecuacion (2) por medio de la sustitucion

$$(3) \qquad x = y + \partial$$

(*) Para evitar fracciones se han multiplicado los números p, q, ∂ respectivamente por 3, 2, 4.

obtenemos

$$(4) \qquad y^4 + 3(p - 2\partial^2)y^2 + 2(q - 3p\partial - 4\partial^3)y - 3\partial(2q + 3p\partial + \partial^3) = 0$$

Sentemos, ahora, para abreviar

$$3(p - 2\partial)^2 = a; \quad 2(q - 3p\partial - 4\partial^3) = b; \quad -3\partial(2q + 3p\partial + \partial^3) = 0$$

i apliquemos el método de *Descartes* para resolver la ecuacion (4). Para este fin, hacemos

$$(5) \qquad y^4 + ay^2 + by + c = (y^2 + uy + v)(y^2 - uy + t)$$

de lo que deducimos, por comparacion de los coeficientes

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{r} v + t - u^2 = a \\ u(t - v) = b \\ tv = c \end{array} \right.$$

ademas

$$2t = \frac{(a + u^2)u + b}{u}, \qquad 2v = \frac{(a + u^2)u - b}{u},$$

luego

$$4tv = \frac{(a + u^2)^2 u^2 - b^2}{u^2} = 4c$$

i, en fin, la *resolvente*

$$(7) \qquad u^6 + 2au^4 + (a^2 - 4c)u^2 - b^2 = 0$$

El coeficiente de u^2 se espresa en funcion de p, q, ∂ como sigue

$$a^2-4c=9(p^2-4p\partial^2+4\partial^4)+12(2q\partial+3p\partial^2+\partial^4)$$
$$=3(3p^2+8q\partial+16\partial^4)$$

Si sentamos todavía en (7)

$$u^2=u', \tag{8}$$

podemos escribir

$$u'^3+6(p-2\partial^2)u'^2+3(3p^2+8q\partial+16\partial^4)u'-$$
$$-4(q-3p\partial-4\partial^3)^2=0. \tag{9}$$

Despues de haber reducido esta ecuacion por medio de la sustitucion

$$u'=z-2(p-2\partial^2) \tag{10}$$

resulta

$$z^3+3(16p\partial^2+8q\partial-p^2)z+$$
$$+2(64q\partial^3-48p^2\partial^2-12pq\partial-p^3-2q^2)=0. \tag{11}$$

Determinemos ahora ∂ de modo que la ecuacion (11) se reduzca a una ecuacion de forma binomial, o sea que sentemos

$$16p\partial^2+8q\partial-p^2=0$$

o bien

$$\partial=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+p^3}}{4p} \tag{12}$$

Ahora bien, $x=4\partial$ es una raiz de la ecuacion (2), luego $y=3\partial$ será una raiz de (4) i, por lo tanto, tambien una raiz de *una* de las ecuaciones de segundo grado que se desprenden de la ecuacion (5), a saber

$$(13)\qquad \begin{cases} y^2+uy+v=0 \\ \text{o} \\ y^2-uy+t=0 \end{cases}$$

Sea y' la otra raiz de la misma ecuacion de segundo grado. Tenemos, en virtud de un teorema conocido,

$$3\partial+y'=\mp u$$

o bien

$$y'=-3\partial\mp u$$

luego, en virtud de (3),

$$x'=-2\partial\mp u$$

Segun esto, para obtener una raiz de la ecuacion (1) hai que resolver sucesivamente las ecuaciones siguientes:

$$\text{(A)}\qquad \partial=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+p^3}}{4p}$$

$$\text{(B)}\qquad z^3=2(2q^2+p^3+12pq\partial+48p^2\partial^2-64q\partial^3)$$

$$\text{(C)}\qquad u^2=u'=z-2(p-2\partial^2)$$

$$\text{(D)}\qquad x=-2\partial\mp u$$

Ejemplo: Sea resolver la ecuacion

$$x^3+15x-124=0$$

Tenemos $p=5, q=-62, \partial=\frac{62\pm63}{20}$, o sea $\partial'=\frac{25}{4}$, $\partial''=-\frac{1}{20}$

A) $\partial=\frac{25}{4}$ da, en virtud de la fórmula (B),

$$z^3=2\left\{7688+125-12.5.62.\frac{25}{4}+48.25.\frac{625}{16},+\right.$$

$$\left.+64.62.\frac{15625}{64}\right\}=2000376=126^3,$$

luego $z=126$.

De aquí por medio de la fórmula (C)

$$u^2=126-10+\frac{625}{4}=\frac{1089}{4}$$

o sea el valor *absoluto* de u

$$|u|=\frac{33}{2}$$

En fin, segun (D)

$$x=-\frac{25}{2}\mp\frac{33}{2}$$

lo que da $x'=-29, x''=4$.

De estos dos valores no sirve mas que $x''=4$, puesto que $x'=-29$ no puede ser raiz de la ecuacion propuesta, por no ser 29 divisor de 124.

B) $\partial=-\frac{1}{20}$ da sucesivamente

$$z=\frac{126}{5},\ |u|=\frac{39}{10},\ x=\frac{1}{10}\mp\frac{39}{10} \text{ o sea } x'=-\frac{19}{5},\ x''=4$$

Como la ecuacion propuesta no tiene raices fraccionarias, puesto que el coeficiente de x^3 es la unidad i los demas coeficientes son enteros, $x' = -\frac{19}{3}$ no sirve.

Las otras dos raices de la ecuacion propuesta se obtiene lo mas fácil, dividiendo el primer miembro por $x-4$ e igualando la funcion resultante de segundo grado a cero.

Para reunir, despues, las cuatro ecuaciones (A) a (D) en una sola, o bien para establecer una fórmula que nos dé x inmediatamente en funcion de p i q, sentemos

$$\pm\sqrt{q^2+p^3} = R, \text{ luego } \partial = \frac{-q+R}{4p}$$

i formemos

$$16p^2\partial^2 = 2q^2 + p^3 - 2qR$$

$$64p^3\partial^3 = -4q^3 - 3p^3q + (4q^2+p^3)R$$

Introduciendo estos valores en la fórmula (B) se obtiene, mediante algunas trasformaciones

$$z^3 = \frac{8R^3(-q+R)}{p^3}$$

de aquí

(14) $$z = \frac{2R\sqrt[3]{-q+R}}{p}$$

Por consiguiente resulta en lugar de (C)

$$u^2 = \frac{2R\sqrt[3]{-q+R}}{p} - \left\{ 2p - \frac{(-q+R)^2}{4p^2} \right\}$$

o sea

$$(15) \qquad u^2 = \frac{2q^2 - 7p^3 - 2qR + 8pR\sqrt[3]{-q+R}}{4p^2}$$

de aquí

$$(16) \qquad |\ u\ | = \sqrt{\frac{2q^2 - 7p^3 - 2qR + 8pR\sqrt[3]{-q+R}}{2p}}$$

i, en fin,

$$(17) \qquad x = \frac{q - R \mp \sqrt{2q^2 - 7p^3 - 2qR + 8pR\sqrt[3]{-q+R}}}{2p}$$

Ejemplo: Sea resolver la ecuacion

$$x^3 - 9x + 28 = 0$$

Tenemos $p = -3$, $q = 14$, $R = \sqrt{196 - 27} = \pm 13$.

A) $R = +13$ dá $\partial = \frac{1}{12}$ i la cantidad subradical de la fórmula (17)

$$2q^2 - 7p^3 - 2qR + 8pR\sqrt[3]{-q+R} = 2.196 + 7.27 - 28.13 +$$
$$+ 24.13 = 529 = 23^2$$

luego

$$x = \frac{1 \mp 23}{-6}$$

o sea $$x' = \frac{11}{3}, x'' = -4.$$

De estos dos valores sirve solo el último, puesto que la ecuacion propuesta no tiene raices fraccionarias.

B) $R = -13$ da $\vartheta = \frac{9}{4}$ i

$$2q^2 - 7p^3 - 2qR + 8p\sqrt[3]{-q+R} = 2.196 + 7.27 + 28.13 -$$
$$- 24.13.3 = 9 = 3^2$$

luego $$x = \frac{27 \mp 3}{-6} \text{ o sea } x' = -4, x'' = -5.$$

En este caso, sirve el primero de los valores de x, puesto que 5 no es divisor de 28.

La fórmula encontrada en (17) para resolver la ecuacion (1) tiene, á mi parecer, interes para los matemáticos en cuanto que tiene una forma, a primera vista, completamente distinta de la llamada fórmula de Cardano, aunque su aplicacion es mas complicada. En verdad, como veremos mas abajo, se puede reducir la fórmula (17) a la de Cardano, i desde luego notamos que presenta los mismos inconvenientes que han conducido al caso irreductible, puesto que en (17) aparece la misma $\sqrt[3]{-q+R}$ que en la fórmula de Cardano. En efecto, no es posible hacer desaparecer la forma imajinaria de x en el caso de que $p = -p'$ i $p'^3 > q^2$.

Nos resta todavía deducir de la fórmula (17) la fórmula de Cardano i lo vamos a hacer de dos modos, aprovechando primero las ecuaciones (13) para obtener u en funcion de p, q i R i, en segundo lugar, fijándonos en el doble signo tanto de R como de la raiz cuadrada que aparece en (17).

1.° En virtud de las ecuaciones (13) i de los valores de v i t que resultan del sistema (6), i si se designa, como mas arriba, por y' la raiz de una de las ecuaciones (13) que pertenece a 3∂, se tiene a la vez

o $$3\partial+y'=-u \quad i \quad 3\partial y'=\frac{(u^2+a)u-b}{2u}$$

o

$$3\partial+y'=+u \quad i \quad 3\partial y'=\frac{(u^2+a)u+b}{2u}$$

Luego se tiene, por eliminacion de y',

o $$-3\partial(u+3\partial)=\frac{(u^2+a)u-b}{2u}$$

o $$3\partial(u-3\partial)=\frac{(u^2+a)u+b}{2u}$$

Esta última ecuacion se convierte en la anterior, si se reemplaza $+u$ por $-u$, luego será

$$\mp 3\partial u-9\partial^2=\frac{(u^2+a)u\mp b}{2u}$$

de aquí

(18) $$\mp(6\partial u^2-b)=u(u^2+a+18\partial^2)$$

Si se introduce en (18) el valor de u de la fórmula (16) i los valores de a i b que, en funcion de p, q i R, se espresan de la manera siguiente:

$$a=\frac{3(7p^3-2q^2+2qR)}{8p^2}$$

$$b=\frac{4q^3+31p^3q-(4q^2+13p^3)R}{8p^3}$$

se obtiene despues de haber ejecutado algunas trasformaciones nada sencillas,

$$u = \pm \frac{2(q+R)\sqrt[3]{(-q+R)^2} - 2p^2\sqrt[3]{-q+R} - p(-q+R)}{2p^2}$$

i luego, en virtud de (D)

$$(19) \qquad x = \frac{p^2\sqrt[3]{-q+R} - (q+R)\sqrt[3]{(-q+R)^2}}{p^2}$$

Si se pasa todavía $q+R$ debajo del radical i se pone

$$\sqrt[3]{(q+R)^3(-q+R)^2} = \sqrt[3]{(R^2-q^2)(R+q)} = p^2\sqrt[3]{q+R},$$

se desprende de (19)

$$x = \sqrt[3]{-q+R} - \sqrt[3]{q+R} = \sqrt[3]{-q+R} + \sqrt[3]{-q-R}$$

o sea $\quad x = \sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}} + \sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$

que es, en verdad, la fórmula de Cardano.

2.° Como la ecuacion (17) proporciona tanto para $R = +\sqrt{q^2+p^3}$ como para $R = -\sqrt{q^2+p^3}$ un mismo valor de x que corresponde a uno de los signos de la raiz cuadrada, se puede deducir de (17), designando ahora por R solamente el *valor positivo* de la $\sqrt{q^2+p^3}$, las dos ecuaciones.

$$(20) \quad \begin{cases} 2px = q - R \mp \sqrt{2q^2 - 7p^3 - 2qR + 8pR\sqrt[3]{-q+R}} \\ \text{i } 2px = q + R \mp \sqrt{2q^2 - 7p^3 + 2qR + 8pR\sqrt[3]{q+R}} \end{cases}$$

Ahora bien, las ecuaciones (20) dan lugar a cuatro combinaciones segun que se consideren los signos $-$ o $+$ de las raices cuadradas. Antes de tomar en cuenta estas combinaciones, sentamos para abreviar

$$2q^2-7p^3-2qR+8pR\sqrt[3]{-q+R}=K^2$$

i

$$2q^2-7p^3+2qR+8pR\sqrt[3]{q+R}=K'^2$$

de lo que se deduce

$$(21)\qquad K^2-K'^2=-4R\left\{q+2p\left(\sqrt[3]{q+R}-\sqrt[3]{-q+R}\right)\right\}$$

En virtud de estas abreviaciones se obtiene, en lugar de (20),

$$(22)\qquad \begin{cases} 2px=q-R\mp K \\ \text{i }\ 2px=q+R\mp K' \end{cases}$$

Combinando ahora en (22) sucesivamente los signos $\mp$ de K con los $\mp$ de K', se deduce que en cualquier caso determinado se verifica *una* de las cuatro relaciones siguientes:

$$(23)\qquad \begin{cases} 1.^{a}\ q-R-K=q+R-K' \text{ o sea } K-K'=-2R \\ 2.^{a}\ q-R-K=q+R+K' \text{ o sea } K+K'=-2R \\ 3.^{a}\ q-R+K=q+R-K' \text{ o sea } K+K'=2R \\ 4.^{a}\ q-R+K=q+R+K' \text{ o sea } K-K'=2R \end{cases}$$

En los *dos primeros casos* se tiene ademas $x=\dfrac{q-R-K}{2p}$ i en los *dos últimos* $x=\dfrac{q-R+K}{2p}$.

Dividiendo ahora la ecuacion (21) por cada una de las 4 ecuaciones (23), resulta en los *dos primeros casos*

$$K \pm K' = 2 \left\{ q + 2p(\sqrt[3]{q+R} - \sqrt[3]{-q+R}) \right\}$$

$$K \mp K' = -2R,$$

luego $$K = q - R + 2p(\sqrt[3]{q+R} - \sqrt[3]{-q+R})$$

i $$x = \frac{q-R-K}{2p} = \sqrt[3]{-q+R} - \sqrt[3]{q+R}$$

$$= \sqrt[3]{-q+R} + \sqrt[3]{-q-R}$$

i eu los *dos últimos casos* se obtiene

$$K \mp K' = -2 \left\{ q + 2p(\sqrt[3]{q+R} - \sqrt[3]{-q+R}) \right\}$$

$$K \pm K' = 2R,$$

luego $$K = R - q - 2p(\sqrt[3]{q+R} - \sqrt[3]{-q+R})$$

i $$x = \frac{q-R+K}{2p} = \sqrt[3]{-q+R} + \sqrt[3]{-q-R}$$

de suerte que resulta, en todo caso, la fórmula de Cardano.

AUGUSTO TAFELMACHER.