CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

(Continuacion)

TEOREMA I

Si una línea de curvatura es plana, el plano de esta línea corta la superficie bajo un ángulo constante.

En efecto, en todos los puntos de la línea de curvatura el plano osculador a esta línea queda fijo, $d\phi$ es por consiguiente igual a cero i la ecuacion (9) se reduce a

$$d\delta = 0$$

$$\delta = C^{te}$$

Lo que demuestra el teorema.

TEOREMA II.

Si la curva de interseccion de dos superficies es una línea de curvatura de cada una de ellas, estas superficies se cortan bajo un ángulo constante.

Sean en efecto δ', δ'' los ángulos que hace la normal principal en un punto de la línea de interseccion con las normales a las dos superficies en el mismo punto; la ecuacion (9) da

$$d\,\delta' = d\,\phi$$

$$d\,\delta'' = d\,\phi$$

Por consiguiente

$$d\,(\delta'' - \delta') = 0$$

$$\delta'' - \delta' = C^{te}$$

Lo que demuestra el teorema.

TEOREMA III.

Si dos superficies se cortan bajo un ángulo constaute i si la curva de interseccion es línea de curvatura de una de ellas, tambien lo es de la otra.

En efecto, se supone que

$$d\,\delta' = d\,\phi$$

$$d\,(\delta'' - \delta') = 0$$

De ahi se deduce

$$d\,\delta'' = d\,\phi$$

Lo que demuestra el teorema.

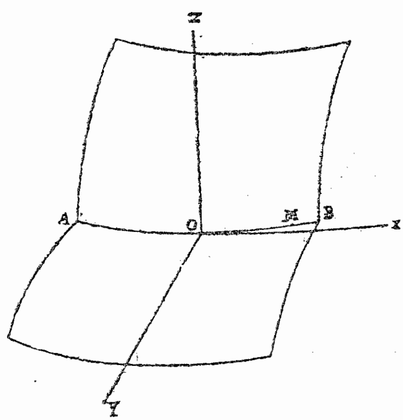
TEOREMA DE DUPIN.

Cuando tres sistemas o familias de superficies se cortan respectivamente a ángulo recto, las curvas de interseccion son líneas de curvatura de cada una de ellas.

Para demostrar este teorema consideraremos, en primer lugar, dos superficies que se cortan a ángulo recto i buscaremos qué relacion debe existir entre los coeficientes de los paraboloides osculadores en un punto cualquiera de la línea de interseccion.

Sean (fig. 3) AB la curva de interseccion, O uno de sus

Fig. 3



puntos, OX una tanjente en O a la curva AB i OY, OZ las normales en O a las dos superficies; las ecuaciones de los paraboloides osculadores en el punto O serán respectivamente

$$2z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$$2y = A'x^2 + 2B'xz + C'z^2$$

Sea M un punto de AB, infinitamente próximo de O, el z i el y del punto M serán infinitamente pequeños de segundo órden respecto de x.

Sean λ, μ, ν i λ', μ', ν' los cosenos directores de las normales en M a las dos superficies se tiene

$$\frac{\lambda}{Ax+By} = \frac{\mu}{Bx+Cy} = \frac{\nu}{-1}$$

$$\frac{\lambda'}{A'x+B'z} = \frac{\mu'}{-1} = \frac{\nu'}{B'x+C'z}$$

O bien si se desprecian los infinitamente pequeños de segundo órden,

$$\frac{\lambda}{Ax} = \frac{\mu}{Bx} = \frac{\nu}{-1} = \frac{1}{-1}$$

$$\frac{\lambda'}{A'x} = \frac{\mu'}{-1} = \frac{\nu'}{B'x} = \frac{1}{-1}$$

Luego

$$\begin{array}{ll} \lambda = -Ax & \lambda' = -A'x \\ \mu = -Bx & \mu' = +1 \\ \nu = +1 & \nu' = -B'x \end{array}$$

De ahí se deduce, al despreciar el segundo órden,

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu = -(B+B')x$$

Pero, en el punto M, las dos normales deben ser perpendiculares una sobre otra, luego se debe tener

$$B+B' = 0$$

Supongamos ahora que, en el punto O, hayan tres superficies octogonales i sea

$$2x = A''y^2 + 2B''yz + C''z^2$$

el paraboloide osculador de la tercera; entre los coeficientes de los tres paraboloides deberemos tener las relaciones

$$B + B' = 0$$
$$B + B'' = 0$$
$$B' + B'' = 0$$

Esto exije que $B = B' = B'' = 0$; luego los tres paraboloides osculadores están referidos a sus planos principales i, en el punto O, las tanjentes a las curvas de interseccion son direcciones principales de las tres superficies; como esto sucede en todos los puntos de interseccion, el teorema está demostrado.

LÍNEAS ASINTÓTICAS

Cuando el paraboloide osculador, en un punto de una superficie, es hiperbólico, el plano tanjente en este punto atraviesa la superficie i las tanjentes a la curva de interseccion son los dos jeneratrices correspondientes del paraboloide osculador.

Estas dos tanjentes son las *direcciones asintóticas* en el punto considerado.

Se llama *línea asintótica*, una curva tanjente en cada punto a una direccion asintótica de este punto. Para obtener la ecuacion diferencial de estas líneas se observa que una seccion normal de la superficie tanjente a una línea asintótica tiene, como la jeneratriz correspondiente del paraboloide osculador, un radio de curvatura infinito; por otra parte la fórmula (1) muestra que se debe tener entónces

$$\alpha\, d\lambda + \beta\, d\mu + \gamma\, d\nu = 0$$

α, β, γ son los cosenos directores de la tanjente, ellos son proporcionales a dx, dy, dz; luego la ecuacion diferencial de las líneas asintóticas es

$$dx\, d\lambda + dy\, d\mu + dz\, d\nu = 0 \tag{10}$$

Esta ecuacion puede tambien escribirse de otra manera: sea $F(x\,y\,z)=0$ la ecuacion de la superficie, se puede poner

$$\lambda = H\,\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\mu = H\,\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\nu = H\,\frac{\partial F}{\partial z}$$

Por consiguiente

$$d\lambda = dH\,\frac{\partial F}{\partial x} + Hd\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

$$d\mu = dH\,\frac{\partial F}{\partial y} + Hd\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

$$d\nu = dH\,\frac{\partial F}{\partial z} + Hd\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

Al sustituir estos valores en la ecuacion (10) se obtiene simplemente

$$dx\, d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + dy\, d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + dz\, d\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0 \tag{11}$$

Sea por ejemplo la superficie

$$xy - z = 0$$

Se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1$$

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = dy, \quad d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = dx, \quad d\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0$$

La ecuacion (11) da entónces

$$dx\, dy + dy\, dx = 0$$

O bien

$$dx\, dy = 0$$

Las líneas asintóticas son por consiguiente

$$x = C \qquad\qquad y = C'$$

o bien

$$z = Cy \qquad\qquad z = C'x$$

Son los dos sistemas de jeneratrices.

Superficies regladas

Sean

$$x = a + \alpha\rho$$
$$y = b + \beta\rho$$
$$z = c + \gamma\rho$$

las ecuaciones de una superficie reglada. Para simplificar la escritura, designaremos con una letra acentuada la derivada de la cantidad correspondiente respecto del parametro t; entónces los cosenos directores λ, μ, ν de la normal en un punto de la superficie serán determinados por las ecuaciones

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$$

$$\lambda(a'+\alpha'\rho)+\mu(b'+\beta'\rho)+\nu(c'+\gamma'\rho)=0$$

Diferenciamos estas ecuaciones tendremos

$$\alpha d\lambda+\beta d\mu+\gamma d\nu+(\lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma')\,dt=0$$

$$(a'+\alpha'\rho)\,d\lambda+\ldots\ldots+dt\left\{\lambda(a''+\alpha''\rho)+\ldots\ldots\right\}$$

$$+d\rho(\alpha'\lambda+\beta'\mu+\gamma'\nu)=0$$

La ecuacion diferencial de las líneas asintóticas es, por otra parte, segun (10)

$$\left\{(a'+\alpha'\rho)\,dt+\alpha d\rho\right\}d\lambda+\ldots\ldots=0$$

La eliminacion de $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ se hace inmediatamente entre las tres últimas ecuaciones i se obtiene

$$(12)\qquad 2\,dt\,d\rho\,(\lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma')+dt^2\left\{\lambda(a''+\alpha''\rho)+\ldots\ldots\right\}=0$$

Una solucion de esta ecuacion es $dt=0$, luego las jeneratrices rectilíneas son líneas asintóticas; pero en cada punto de la superficie hai tambien otra direccion determinada.

En las superficies desarrollables se tiene

$$\lambda \alpha' + \mu \beta' + \nu \gamma' = 0$$

Luego la ecuacion (12) se reduce a

$$dt^2 = 0$$

i las dos líneas asintóticas que pasan por cada punto se confunden con la jeneratriz.

LÍNEAS JEODÉSICAS

Se llama *línea jeodésica* la línea mas corta que, sobre una superficie, une dos puntos dados.

TEOREMA.

El plano osculador en todos los puntos de una línea jeodésica es normal a la superficie.

En efecto, una vez la línea jeodésica trazada, un elemento infinitamente pequeño MM' de ella debe ser tambien el camino mas corto de M a M'. Sea Δc la lonjitud de la cuerda MM' i ds el arco contado sobre la superficie, r el radio de curvatura en M de la línea jeodésica; se tiene

$$\Delta c = ds - \frac{ds^3}{24r^2} + \ldots .$$

O bien, al mismo órden de aproximacion

$$ds = \Delta c + \frac{\Delta c^3}{24r^2} + \ldots .$$

Se sabe ahora que el radio r de curvatura, en un punto de una curva cualquiera trazada sobre una superficie, es igual al radio de curvatura en el mismo punto de la seccion plana de la superficie por el plano osculador de la curva; ademas se sabe que el radio de curvatura r de la seccion de la superficie por un plano normal que pasa por la cuerda MM' es ligado a r por la fórmula de Meusnier

$$r = R \cos \delta$$

siendo δ el ángulo del plano osculador a la curva con el la normal a la superficie; se tiene, por consiguiente

$$ds = \Delta c + \frac{\Delta c^3}{24 R^2 \cos^2 \delta} + \ldots.$$

El primer término Δc queda constante para todas las curvas de la superficie que pasan por M i M' i el segundo tiene su valor mínimo cuando δ es igual a cero, luego una línea jeodésica, segun su definicion misma, debe tener, en cada punto, su plano osculador normal a la superficie.

Ecuacion diferencial de las líneas jeodésicas

Sea

$$F(x\, y\, z) = 0$$

la ecuacion de una superficie; en un punto de una línea jeodésica los cosenos directores de la normal principal son proporcionales a

$$\frac{d^2 x}{ds^2}, \quad \frac{d^2 y}{ds^2}, \quad \frac{d^2 z}{ds^2}$$

Por otra parte, los cosenos directores de la normal a la superficie son proporcionales a

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}$$

Estas dos direcciones deben ser confundidas, luego se debe tener

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Estas dos relaciones equivalen en realidad a una sola ecuacion, porque si se suman los numeradores i los denominadores multiplicados respectivamente por los factores $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ las sumas son separadamente nulas.

Líneas jeodésicas de las superficies de revolucion.

Supondremos que OZ es el eje de revolucion, entónces $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ son respectivamente proporcionales a x, y i se tiene

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{y}$$

Luego

$$x\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2x}{ds^2} = 0$$

De aquí se deduce

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = C^{te} \tag{13}$$

Sea r el radio del paralelo de un punto de la superficie i ϕ el ángulo del meridiano con XOZ, se tiene

$$x = r \cos \phi$$
$$y = r \sin \phi$$

$$x\, dy - y dx = r^2 d\,\phi$$

Sea tambien A el ángulo de la tanjente a la línea jeodésica con la tanjente al meridiano, se tiene

$$r d\phi = ds \sin A$$

Luego

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = r \sin A$$

Al comparar esta ecuacion con (13) se obtiene

$$r \sin A = C^{te}$$

Tal es por consiguiente la propiedad característica de las líneas jeodésicas de las superficies de revolucion.

Si la superficie de revolucion se reduce a una esfera, el producto $r \sin A$ representa la distancia polar del círculo máximo tanjente a la línea jeodésica en el punto considerado; luego, sobre la esfera, los arcos de círculo máximo tanjentes a una línea jeodésica deben tener todos una misma distancia polar; esto exije que la línea jeodésica misma sea confundida con un arco de círculo máximo.

CAPÍTULO IV

COORDENADAS CURVILÍNEAS

Dibujo de los mapas jeográficos

En vez de definir una superficie S por medio de una sola ecuacion, entre las coordenadas de uno cualquiera de sus puntos, se pueden espresar las tres coordenadas en funcion de dos variables independientes u i v.

Se escribirá, por ejemplo,

$$(1) \qquad \begin{cases} x=f_1(u, v) \\ y=f_2(u, v) \\ z=f_3(u, v) \end{cases}$$

i estas tres ecuaciones seran equivalentes a una sola ecuacion

$$(2) \qquad F(x\,y\,z)=0$$

Para que los dos sistemas (1) i (2) representen la misma superficie, es necesario que, al subsistir los valores (1) de x, y, z en la ecuacion (2), ésta sea idénticamente satisfecha; en otros terminos, una vez la sustitucion hecha, u i v deben desaparecer idénticamente.

De ahí se deducen dos ecuaciones de condicion entre las derivadas parciales de f_1, f_2, f_3 respecto de u i v; escribamos en efecto que las derivadas parciales de F respecto de u i v son nulas, tendremos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

Sean λ, μ, ν los cosenos directores de la normal a la superficie S, las ecuaciones precedentes pueden escribirse tambien

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}\lambda\frac{\partial x}{\partial u}+\mu\frac{\partial y}{\partial u}+\nu\frac{\partial z}{\partial u}=0\\ \lambda\frac{\partial x}{\partial v}+\mu\frac{\partial y}{\partial v}+\nu\frac{\partial z}{\partial v}=0\end{aligned}\right.$$

Estas ecuaciones dan por consiguiente los cosenos directores de la normal en un punto cualquiera de la superficie cuando ella está definida por las ecuaciones (1).

Si una de las variables u o v fuera una funcion de la otra, las ecuaciones (1) representarian simplemente una curva i entónces las ecuaciones (3) deberian dar la normal en un punto de esta curva; pero en un punto de una curva, hai una infinidad de normales contenidas en un mismo plano; luego en este caso, las dos ecuaciones (3) deben reducirse a una sola i se debe tener

$$(4)\qquad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial x}{\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}}{\dfrac{\partial z}{\partial v}}$$

Así, las condiciones (4) espresan que una cualquiera de las variables u o v es funcion de la otra o bien que x, y, z son funciones de un solo parametro.

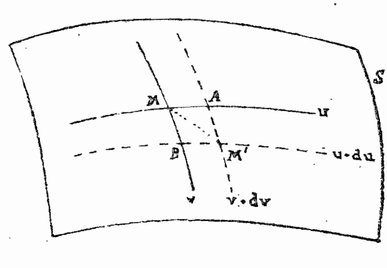
Interpretacion jeométrica

Si, en las ecuaciones (1), se supone u constante i v variable se obtiene una curva de la superficie S: la llamaremos *curva u*. Si, al contrario, u es variable i v constante, se obtiene otra curva de la misma superficie, la llamaremos *curva v*. Se comprende asi que, por cada punto M de la superficie, pasan una curva u i una curva v; recíprocamente, cuando se dan los valores de u i v, se definen dos curvas de la superficie i tambien su punto de interseccion.

En resúmen, cada punto M de la superficie está definido por los valores de los parametros u, v de las fórmulas (1); por esto, se dice que u i v son las *coordenadas curvilíneas* del punto M.

Sean (fig. 4) M el punto de coordenadas u, v i M' otro punto

Fig. 4



infinitamente próximo, $x+dx, y+dy, z+dz$ las coordenadas de

M' i $u+du$, $v+dv$ los valores correspondientes de u i v; se deduce de (1)

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv \end{aligned} \right.$$

Cuando u es constante, du es igual a cero i el cambio de lugar del punto M es dirijido segun la curva u; sus proyecciones son proporcionoles a $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, luego estas derivadas son proporcionales a los cosenos directores de la tanjente a la curva u; del mismo modo, si v es constante, el cambio de lugar es dirijido segun la curva v i las tres derivadas $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ son proporcionales a los cosenos directores de la tanjente a la curva v.

Sean λ, μ, ν, los cosenos directores de la normal a la superficie S en el punto M; se deberá tener evidentemente

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial v} + \mu \frac{\partial y}{\partial v} + \nu \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial u} + \nu \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

Se obtienen por consiguiente las ecuaciones (3); por lo demas si estas ecuaciones son satisfechas, los cocenos λ, μ, ν satisfacen, cualesquiera que sean du i dv, a la ecuacion

$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0$$

la cual espresa que la normal es perpendicular a todos los cambios de lugar situado sobre la superficie.

Si una de las variables u i v fuera funcion de la otra, las dos curvas u i v serian confundidas, puesto que, cuando u es constante, v es constante tambien, luego los tanjentes a estas dos curvas tendrian la misma direccion; se obtienen así de nuevo las relaciones (4).

Distancia de dos puntos infinitamente próximos

Sea ds la distancia de los dos puntos M i M' (fig. 4) se tiene

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Reemplacemos dx, dy, dz por sus valores (5) i pongamos

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = A \\ &\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v} = B \\ &\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = C \end{aligned} \right.$$

Tendremos

$$(7) \qquad ds^2 = A du^2 + 2B du\, dv + C dv^2$$

Sean MA, MB los arcos infinitamente pequeños intercepta-dos sobre las curvas u, v; la fórmula (7) da

$$\overline{MA}^2 = C dv^2$$
$$\overline{MB}^2 = A du^2$$

Por otra parte, se puede considerar $MA\ M'B$ como un paralelograma, sea θ el ángulo AMB, se tiene, en el triángulo MAM'

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{AM'}^2 + 2 MA.AM'. \cos\theta$$

O bien

$$ds^2 = C dv^2 + A du^2 + 2\sqrt{AC}\, du\, dv \cos\theta$$

Al comparar esta fórmula con (7) se obtiene

$$B = \sqrt{AC} \cos\theta$$

De aquí se deduce que las curvas u i v son ortogonales cuando el coeficiente B de $du\, dv$ en la espresion de ds^2 es igual a cero.

Area del paralelograma elemental

Sea dS el área buscada; la misma figura (4) da

$$dS = MA \times MB \text{ sen } \theta$$

O bien

$$dS = \sqrt{AC}\, du\, dv \text{ sen } \theta$$

O todavia, si se reemplaza θ por su valor,

$$(8) \qquad dS = \sqrt{AC - B^2}\, du\, dv$$

Aplicacion a la esfera

Las coordenadas usuales de los puntos sobre la esfera son la lonjitud i la latitud; designemos la lonjitud por u i la latitud por v; entónces las curvas u son los meridianos i las curvas v los paralelos.

Sea R el radio de la esfera, las coordenadas rectilíneas de un punto en funcion de u i v son

$$x = R \cos v \cos u$$

$$y = R \cos v \sin u$$

$$z = R \sin v$$

De ahí se deduce

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -R \cos v \sin u \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -R \sin v \cos u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = +R \cos v \cos u \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -R \sin v \text{ sen } u$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = R \cos v$$

Por consiguiente

$$(9)\quad \begin{cases} A = R^2 \cos^2 v \\ B = 0 \\ C = R^2 \\ ds^2 = R^2 \cos^2 v \, du^2 + R^2 \, dv^2 \\ dS = R^2 \cos v \, du \, dv \end{cases}$$

Se averigua que los meridianos cortan los paralelos a ángulo recto, puesto que $B = 0$.

Mapas jeográficos

Representemos cada punto de la esfera por un punto de un plano; sean x' y' las coordenadas del punto del plano que corresponde al punto u, v de la esfera; podremos escribir, de una manera jeneral,

$$(10)\quad \begin{cases} x' = \phi_1 \, (u, v) \\ y' = \phi_2 \, (u, v) \end{cases}$$

Hagamos todavía

$$(11)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial x'}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y'}{\partial u}\right)^2 = A' \\[2ex] \dfrac{\partial x'}{\partial u} \dfrac{\partial x'}{\partial v} + \dfrac{\partial y'}{\partial u} \dfrac{\partial y'}{\partial v} = B' \\[2ex] \left(\dfrac{\partial x'}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y'}{\partial v}\right)^2 = C' \end{cases}$$

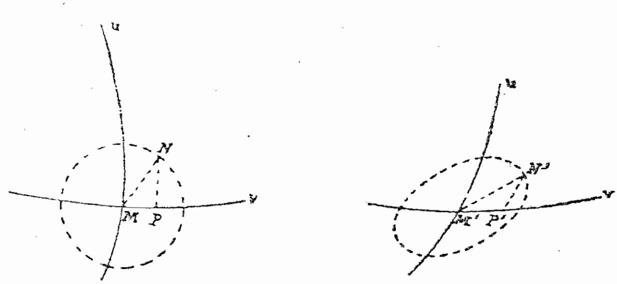
i sean ds' la distancia en el plano de dos puntos infinitamente próximos correspondientes a los puntos u, v i $u+du$, $v+dv$ de la esfera; dS' el área del paralelograma elemental, tendremos, como mas arriba,

$$(12) \qquad \begin{cases} ds'^2 = A' \, du^2 + 2B' \, du \, dv + C' \, dv^2 \\ dS' = \sqrt{A' C' - B^2} \, du \, dv \end{cases}$$

Estas fórmulas permitirán estudiar las deformaciones de las figuras esféricas en su representacion en el plano.

Consideremos, por ejemplo, (fig. 5), una circunferencia de radio infinitamente pequeño r, descrita al rededor del punto M de

Fig. 5



la esfera i busquemos cuál será, en el caso jeneral, la curva representativa en el plano.

Sobre la esfera referimos la posicion de un punto N de la circunferencia a dos ejes rectangulares tanjentes al meridiano i al paralelo de M i sea ϕ el ángulo de MN con el paralelo, tendremos

$$MP = r \cos \phi$$
$$NP = r \sin \phi$$

Por otra parte, los valores de du, dv que corresponden al punto N, satisfacen, segun (9), a las relaciones

$$MP = R \cos v \, du$$

$$NP = R \, dv$$

Por consiguiente

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} du &= \frac{r}{R \cos v} \cos \phi \\ dv &= \frac{r}{R} \sin \phi \end{aligned} \right.$$

Sea N' el punto del plano que corresponde al punto N de la esfera; referiremos las coordenadas de N' a dos ejes, tanjentes tambien al meridiano i al paralelo de M'; estos ejes podrán ser oblícuos; sean ξ, η las coordenadas de N', tendremos, segun (12)

$$M'P' = \xi = \sqrt{A'} \, du$$
$$N'P' = \eta = \sqrt{C'} \, dv$$

O bien, si se reemplazan du i dv por sus valores (13),

$$\xi = \frac{r\sqrt{A'}}{R \cos v} \cos \phi$$

$$\eta = \frac{r\sqrt{C'}}{R} \operatorname{sen} \phi$$

Estas ecuaciones tienen la forma

$$\xi = a \cos \phi$$
$$\eta = b \operatorname{sen} \phi$$

De suerte que, cuando ϕ varía, es decir cuando el punto N describe la circunferencia, la ecuacion del lugar jeométrico de N' es

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

Es la ecuacion de una elipse referida a dos ejes conjugados.

Así, en jeneral, una circunferencia infinitamente pequeña de la esfera es representada por una elipse.

Para que esta elipse sea una circunferencia es necesario, en primer lugar, que los meridianos i los paralelos, en el plano, sean rectangulares, luego se debe tener

$$B' = 0$$

i, en seguida, que los diámetros a i b sean iguales, luego se debe tener

$$\frac{A'}{\cos^2 v} = \frac{C'}{1}$$

Si estas condiciones son satisfechas, una figura infinitamente pequeña trazada sobre la esfera al rededor de M será representada por una figura semejante en el plano i la razon de similitud será, segun (9) i (12)

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{\sqrt{A'}}{R \cos v} = \frac{\sqrt{C'}}{R}$$

Proyeccion estereográfica

En este sistema de proyeccion, cada punto de una media esfera es representado por su perspectiva cónica sobre el plano que la limita, el *ojo* del observador está situado en la otra media esfera, en el polo mismo del referido plano.

Sean u i v las coordenadas esféricas de un punto; x' y' las coordenadas de su perspectiva, se tendrá

$$x' = R \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right) \cos u$$

$$y' = R \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right) \sin u$$

De aquí se deduce

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = -R \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right) \operatorname{sen} u \; ; \quad \frac{\partial x'}{\partial v} = -\frac{R}{2} \, \frac{\cos u}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right)}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial u} = +R \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right) \cos u \; ; \quad \frac{\partial y'}{\partial v} = -\frac{R}{2} \, \frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right)}$$

Luego

$$A' = R^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right)$$

$$B' = 0$$

$$C' = \frac{R^2}{4} \, \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right)}$$

Como $B'=0$, los meridianos i los paralelos serán ortogonales en el mapa; ahora, para que los ángulos sean conservados es necesario que se tenga

$$\frac{A'}{\cos^2 v} = \frac{C'}{1}$$

O bien

$$R^2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \frac{\cos^2 v}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right)}$$

Esta relacion es efectivamente averiguada.

Finalmente la razon de similitud es

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{\sqrt{A'}}{R\cos v} = \frac{\sqrt{C'}}{R} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right)}$$

Cuando $v=90^0$ esta razon es igual $\frac{1}{2}$, de manera que, cerca del polo, las dimensiones lineales de la figura son reducidas a la mitad; cuando $v=0$, la razon es uno, luego, cerca del ecuador, las figuras son representadas en verdadera magnitud.

Mapa de Mercator

En este mapa los meridianos son representados por rectas perpendiculares al ecuador, i la distancia de los paralelos consecutivos se calcula de tal manera que los ángulos de la esfera sean conservados en el mapa.

Veamos cuáles deben ser estas distancias. Sean u, v las coordenadas de un punto de la esfera i x', y' las del punto correspondiente del mapa; podremos escribir

$$x' = Ru$$
$$y' = f(v)$$

Luego

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = R \qquad \frac{\partial x'}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial y'}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial y'}{\partial v} = f'(v)$$

i tambien

$$A' = r^2$$

$$B' = 0$$

$$C' = f'^2(v)$$

Se averigua que, en el mapa, los meridianos i los paralelos son perpendiculares entre sí; ahora, para que los ángulos sean conservados, es necesario que

$$\frac{A'}{\cos^2 v} = \frac{C'}{1}$$

Luego se debe tener

$$f'^2(v) = \frac{R^2}{\cos^2 v}$$

O bien

$$f'(v) = \frac{R}{\cos v}$$

De aquí se deduce

$$f(v) = R\,L\,\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right)$$

Con este valor de la funcion $f(v)$ una figura infinitamente pequeña de la esfera es representada por otra semejante en el mapa i la razon de similitud es

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{1}{\cos v}$$

Se ve que la deformacion lineal aumenta a medida que la latitud aumenta.

CAPÍTULO V

PROPIEDADES JENERALES DE LAS SUPERFICIES

Condicion necesaria i suficiente para que dos superficies puedan aplicarse una sobre otra

Consideremos las dos superficies

$$\begin{aligned} x &= f_1(u, v) & \qquad x' &= \phi_1(u, v) \\ y &= f_2(u, v) & \qquad y' &= \phi_2(u, v) \\ z &= f_3(u, v) & \qquad z' &= \phi_3(u, v) \end{aligned}$$

A cada punto de la primera corresponde otro de la segunda i las distancias ds, ds' de dos puntos infinitamente próximos correspondientes de las dos figuras son dadas por las fórmulas

$$ds^2 = A\ du^2 + 2B\ du\ dv + C\ dv^2$$

$$ds'^2 = A'\ du^2 + 2B'\ du\ dv + C'\ dv^2$$

Ademas, si θ i θ' son los ángulos que hacen las curvas u i v en los puntos considerados, se tiene

$$\cos\theta = \frac{B}{\sqrt{AC}}$$

$$\cos\theta' = \frac{B'}{\sqrt{A'C'}}$$

Sean (fig. 5) M i M' dos puntos correspondientes de las dos figuras i consideremos, sobre la primera superficie, una circunferencia de radio infinitamente pequeño r descrita al rededor del punto M; sean ξ, η las coordenadas de un punto N de esta circunferencia respecto de dos ejes tanjentes, en M, a las curvas u i v; la ecuacion de esta circunferencia será

$$\xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta\cos\theta = r^2$$

Se tendrá ademas

$$\xi = \sqrt{A}\ du$$
$$\eta = \sqrt{C}\ dv$$

Sean ahora ξ', η' las coordenadas del punto N', correspondiente a N, respecto de dos ejes tanjentes en M' a las curvas u i v, se tendrá

$$\xi' = \sqrt{A'}\, du = \sqrt{\frac{A'}{A}}\, \xi$$

$$\eta' = \sqrt{C'}\, dv = \sqrt{\frac{C'}{C}}\, \eta$$

Luego la ecuacion del lugar jeométrico de N', al rededor de M', será

$$(14) \qquad \frac{A}{A'}\xi'^2 + \frac{C}{C'}\eta'^2 + 2\sqrt{\frac{AC}{A'C'}}\,\xi'\eta' \cos\theta = r^2$$

Este lugar jeométrico es jeneralmente como se ve una cónica referida a su centro.

Para que las dos superficies puedan aplicarse una sobre la otra es necesario que las figuras infinitamente pequeñas correspondientes de las dos superficies sean iguales; luego, en el caso considerado la ecuacion (14) debe representar una circunferencia de radio r i de centro M'.

Una primera condicion es que θ sea igual a θ'; de aquí se deduce

$$\frac{B}{\sqrt{AC}} = \frac{B'}{\sqrt{A'C'}}$$

En seguida se debe tener

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'} = 1$$

Estas dos condiciones equivalen a

$$A = A'$$

$$B = B'$$

$$C = C'$$

En resúmen, la condicion necesaria i suficiente para que dos superficies puedan aplicarse una sobre la otra, es que se puedan espresar las ecuaciones de las dos superficies, en funcion de dos parametros u, v, de tal manera que las distancias ds, ds' de dos puntos infinitamente próximos correspondientes tengan exactamente los mismos valores en funcion de u i v.

Aplicacion

Las ecuaciones del *helicoide* con plano director son

$$x = v \cos u$$

$$y = v \operatorname{sen} u$$

$$z = K u$$

u i v son dos variables; de aquí se deduce

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -v \operatorname{sen} u \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \cos u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = +v \cos u \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \operatorname{sen} u$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = K \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

Luego

$$A = v^2 + K^2$$

$$B = 0$$

$$C = 1$$

i, por consiguiente

$$ds^2 = (v^2 + K^2)\, du^2 + dv^2$$

En una superficie de revolucion, cuyos meridianos i paralelos son las curvas u i v, la espresion de la distancia ds' de dos puntos infinitamente próximos tiene la forma

$$ds'^2 = \phi(v)\, du^2 + dv^2$$

Estas dos espresiones de ds i ds' serian idénticas si se tuviera

$$\phi(v) = v^2 + K^2$$

i la superficie de revolucion correspondiente seria *aplicable* sobre el helicoide; busquemos cuál es esta superficie de revolucion.

El parametro v representa entónces el arco del meridiano i $\phi(v)$ es el cuadrado del radio del paralelo, de manera que si se refieren los puntos del meridiano a dos ejes rectangulares OX, OY, tales que OX sea el eje de revolucion, se tiene

$$y^2 = \phi(v) = v^2 + K^2$$

$$dv^2 = dx^2 + dy^2$$

La ecuacion diferencial del meridiano es, por consiguiente,

$$dx = \frac{K\,dy}{\sqrt{y^2 - K^2}}$$

i la integracion da

$$x = K\,L\,(y + \sqrt{y^2 - K^2}) + C^{te}$$

A. OBRECHT

(Continuará)