CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

(Continuacion)

Cilindros

Sean α, β, γ los cosenos directores de las jeneratrices, la ecuacion jeneral de los cilindros podrá escribirse bajo la forma

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = a + \alpha\rho \\ y = b + \beta\rho \\ z = c + \gamma\rho \end{array} \right.$$

Las coordenadas a, b, c serán las de un punto de la directriz i ellas serán funciones de cierto parametro variable t.

Se comprende que la eliminacion de t i ρ dará una ecuacion entre x, y, z tal como

$$(7) \qquad F(x, y, z) = 0$$

Ahora si, en esta última ecuacion, se reemplazan x, y, z por sus valores (6) los dos parametros t i ρ deberan eliminarse idénticamente; en resúmen la funcion F, una vez reemplazados x, y, z por sus valores (6), debe ser independiente de t i ρ. Segun esto, las derivadas parciales de F, respecto a t i ρ, deben ser nulas cualesquiera que sean x, y, z; la derivada respecto a ρ es

$$(8) \qquad \frac{\partial F}{\partial \rho} = \alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma \cdot \frac{\partial F}{\partial z}$$

Luego, en todos los puntos del cilindro, se debe tener

$$(9) \qquad \alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

O bien

$$\alpha \lambda + \beta \mu + \gamma \nu = 0$$

Esta ecuacion espresa que la normal en cada punto del cilindro es perpendicular a la jeneratriz o que el plano tanjente, en todos los puntos, es paralelo a una misma recta.

Recíprocamente la ecuacion (9) es característica de los cilindros; supongamos, en efecto que la ecuacion (7) sea la de una superficie que averigua la relacion (9) i sean a, b, c las coordenadas de uno de sus puntos; tracemos por este punto la recta (6); la ecuacion (7) es satisfecha cuando $\rho = 0$, puesto que a, b, c son, por hipótesis, las coordenadas de un punto de la superficie; ahora la misma ecuacion (7) es satisfecha para todos los valores de ρ; en efecto segun (8) i (9) se tiene, para todos los valores de ρ,

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 0$$

Luego, al sustituir a x, y, z sus valores (6) ρ desaparece de la ecuacion (7). La superficie contiene por consiguiente toda la recta (6); lo mismo sucede en cada uno de sus puntos; luego la superficie es un cilindro.

Conos

Las ecuaciones (6) pueden representar tambien las ecuaciones jenerales de los conos, entónces a, b, c son las coordenadas constantes del vértice i α, β, γ tres funciones de un parametro variable t.

La ecuacion (9) toma entónces la forma

$$(10) \qquad (x-a)\frac{\partial F}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial F}{\partial y}+(z-c)\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

Esta es la ecuacion característica de los conos.

En efecto sea (7) la ecuacion de una superficie que satisface a la condicion (10) i $x_1\ y_1\ z_1$ las coordenadas de uno de sus puntos, ρ_1 su distancia al punto a, b, c; consideremos la recta

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_1 + \frac{x_1-a}{\rho_1} r \\ y &= y_1 + \frac{y_1-b}{\rho_1} r \\ z &= z_1 + \frac{z_1-c}{\rho_1} r \end{aligned} \right.$$

Al sustituir estos valores de x, y, z en la ecuacion (7) ésta será satisfecha por hipótesis cuando $r=0$; ahora la misma ecuacion será satisfecha para todos los valores de r; en efecto se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{x_1 - a}{\rho_1} + \frac{\partial F}{\partial y} \quad \frac{y_1 - b}{\rho_1} + \frac{\partial F}{\partial z} \quad \frac{z_1 - c}{\rho_1}$$

O bien

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\rho_1}{\rho_1 + r} \quad \left[(x-a)\frac{\partial F}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial F}{\partial y} + (z-c)\frac{\partial F}{\partial z} \right]$$

Luego, segun (10),

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

Por consiguiente, al sustituir a x, y, z sus valores (11), en la ecuacion (7), r desaparece. La superficie contiene por consiguiente toda la recta que une el punto $x_1\ y_1\ z_1$ al punto fijo a, b, c.

Como $x_1\ y_1\ z_1$ son las coordenadas de un punto cualquiera de la superficie se ve que ella es un cono cuyo vértice es el punto a, b, c.

TEOREMA.

Si a, b, c son las coordenadas del vértice de un cono, la ecuacion de la superficie es homojénea respecto de los binomios $x-a$, $y-b$· $z-c$.

Sea en efecto $F\ (x, y, z)$ una funcion homojénea, de grado m, respecto de los binomios $x-a$, $y-b$, $z-c$; si, en esta ecuacion, se reemplazan los binomios por $\alpha\rho$, $\beta\rho$, $\gamma\rho$, todos los términos contienen, por definicion ρ^m en factor, luego se puede escribir

$$F(a+\alpha\rho,\ b+\beta\rho,\ c+\gamma\rho)=\rho^m\ F(a+\alpha,\ b+\beta,\ c+\gamma)$$

Esta relacion debe tener lugar para todos los valores de ρ, luego las derivadas de los dos miembros respecto a ρ deben ser idénticamente iguales; se obtiene asi la ecuacion

$$\alpha\frac{\partial F}{\partial x}+\beta\frac{\partial F}{\partial y}+\gamma\frac{\partial F}{\partial z}=m\rho^{m-1}\ F(a+\alpha, b+\beta,\ c+\gamma)$$

O bien

$$(12)\quad (x-a)\frac{\partial F}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial F}{\partial y}+(z-c)\frac{\partial F}{\partial z}=m\ F(x, y, z)$$

Se ve que la ecuacion característica de los conos satisface a esta última ecuacion, puesto que la ecuacion de la superficie es $F(x\ y\ z)=0$.

Ahora la relacion (12) es característica tambien de las funciones homojéneas de grado m respecto de los binomios $x-a$, $y-b$, $z-c$.

Sea, en efecto, $F(x, y, z)$ una funcion que satisface a la relacion (12); hagamos en ella

$$x=a+\alpha\rho$$
$$y=b+\beta\rho$$
$$z=c+\gamma\rho$$

tendremos

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F}{\partial z} =$$

$$\frac{1}{\rho} \left\{ (x-a) \frac{\partial F}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial F}{\partial y} + (z-c) \frac{\partial F}{\partial z} \right\}$$

O bien, segun (12)

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{m}{\rho} F$$

O bien

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{m}{\rho}$$

Luego

$$L\, F = m\, L\, \rho + L\, C$$

$$F = \rho^m\, C$$

La constante de integracion C es una cantidad cualquiera, independiente de ρ; para determinar su valor basta hacer $\rho = 1$, entónces

$$C = F\,(a + \alpha,\ b + \beta,\ c + \gamma)$$

Se obtiene por consiguiente

$$F(a+\alpha\rho,\ b+\beta\rho,\ c+\gamma\rho) = \rho^m F(a+\alpha,\ b+\beta,\ c+\gamma)$$

Lo que averigua que la funcion F es homojénea respecto de los binomios $x-a, y-b, z-c$.

En particular, cuando el vértice de un cono es el oríjen de las coordenadas, su ecuacion es homojénea en x, y, z.

PROPIEDADES DE LAS SUPERFICIES REGLADAS

Consideremos, sobre una superficie reglada cualquiera, una curva que sea normal, en cada uno de sus puntos, a la jeneratriz que pasa por este punto; sean a, b, c las coordenadas de un punto A de esta curva i α, β, γ los cosenos directores de la jeneratriz AB que pasa por este punto; las seis cantidades $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, podrán ser consideradas como funciones de un mismo parametro t; ademas, estas funciones satisfacen a las relaciones

$$(13) \qquad \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \\ \alpha \dfrac{da}{dt} + \beta \dfrac{db}{dt} + \gamma \dfrac{dc}{dt} = 0 \end{cases}$$

La primera significa que α, β, γ son los cosenos directores de una misma recta i la segunda, que la curva, lugar jeométrico de los puntos a, b, c, es normal a las jeneratrices.

Las ecuaciones de la jeneratriz AB son, por otra parte,

$$(14) \qquad \begin{cases} x=a+\alpha\rho \\ y=b+\beta\rho \\ z=c+\gamma\rho \end{cases}$$

De suerte que la ecuacion jeneral de las superficies regladas resultará de la eliminacion de t i ρ entre estas últimas ecuaciones.

Sea M el punto cuyas coordenadas son x, y, z: cuando t es constante i ρ variable el punto M describe una jeneratriz i cuando ρ es constante i t variable el punto M describe una curva $\rho=$const.

TEOREMA.

Todas las curvas $\rho=$const. son normales a las jeneratrices

Sean, en efecto, dx, dy, dz las proyecciones del cambio de lugar de M sobre una curva $\rho=$const; se deduce de (14)

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} dx &= \left(\frac{da}{dt} + \rho \frac{d\alpha}{dt} \right) dt \\ dy &= \left(\frac{db}{dt} + \rho \frac{d\beta}{dt} \right) dt \\ dz &= \left(\frac{dc}{dt} + \rho \frac{d\gamma}{dt} \right) dt \end{aligned} \right.$$

Observaremos que, segun la primera ecuacion (13),

$$\alpha \frac{da}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} = 0$$

Multipliquemos dx por α, dy por β, dz por γ i sumamos, tendremos, segun (13)

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0$$

Luego el cambio de lugar de M sobre una curva $\rho =$ const. es normal a la jeneratriz que pasa por este punto.

Angulo i distancia de dos jeneratrices infinitamente próximas

Sean AB, $A'B'$ dos jeneratrices infinitamente próximas i t, $t+dt$ los valores correspondientes del parametro t; $d\epsilon$ el ángulo que forman. Tracemos por el oríjen de las coordenadas dos rectas OP, OP' respectivamente paralelas a AB i AB' i tomamos sobre ellas $OP = OP' = 1$. La distancia de los puntos P i P' mide el ángulo $d\epsilon$ i sus coordenadas respectivas son α, β, γ i $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$.

Ahora PP' está en un plano paralelo a las dos jeneratrices AB i $A'B'$ i su direccion límite es perpendicular sobre OP o AB; sean por consiguiente α_1 β_1 γ_1 los cosenos directores de PP' i α_2 β_2 γ_2 los de una recta perpendicular a las dos jeneratrices AB i $A'B'$.

Las tres direcciones α, β, γ; α_1 β_1 γ_1; α_2 β_2 γ_2 forman en el límite, un triedro rectangular.

Proyectemos PP' sobre OX, tendremos

$$\alpha_1 d\epsilon = \frac{d\alpha}{dt}\, dt.$$

Luego

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 \frac{d\epsilon}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt} \\ \beta_1 \frac{d\epsilon}{dt} &= \frac{d\beta}{dt} \\ \gamma_1 \frac{d\epsilon}{dt} &= \frac{d\gamma}{dt} \end{aligned} \right.$$

Estas fórmulas permiten calcular $\frac{d\epsilon}{dt}$ en funcion de las derivadas de los cosenos α, β, γ.

Supongamos que los puntos A i A' pertenezcan a la curva $\rho=0$ i sea NN' la perpendicular comun a las dos jeneratrices; los puntos N, N' pertenecen evidentemente a una curva $\rho=$const.; ademas la direccion de NN' debe ser $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$.

Podemos suponer que los primeros miembros de las fórmulas (15) son las tres proyecciones de NN'; sean entónces $NN'=d\sigma$ i $AN=R$, se tendrá

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_2\frac{d\sigma}{dt} &= \frac{da}{dt}+R\frac{d\alpha}{dt} \\ \beta_2\frac{d\sigma}{dt} &= \frac{db}{dt}+R\frac{d\beta}{dt} \\ \gamma_2\frac{d\sigma}{dt} &= \frac{dc}{dt}+R\frac{d\gamma}{dt} \end{aligned}\right.$$

Estas fórmulas dan, a la vez, la distancia $d\sigma$ de las dos jeneratrices i la posicion N del punto de AB por el cual pasa la perpendicular comun a las dos jeneratrices.

Plano tanjente

Sea $F(x,y,z)=0$ la ecuacion de la superficie reglada; si se reemplazan x, y, z por los valores (14) la ecuacion debe ser satisfecha idénticamente, es decir para todos los valores de t i de ρ, de ahí resulta que las derivadas parciales de la funcion F respecto de t i ρ deben ser nulas; se tendrá por consiguiente

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=0$$

Podemos en estas ecuaciones reemplazar las derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ por los cosenos λ, μ, ν de la normal, se tendrá así

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial \rho} + \mu \frac{\partial y}{\partial \rho} + \nu \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0$$

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial t} + \mu \frac{\partial y}{\partial t} + \nu \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

Segun (14), las derivadas parciales de x, y, z respecto de ρ son α, β, γ i las derivadas parciales, respecto de t, son los valores que resultan de las ecuaciones (15); luego λ, μ, ν serán determinados por las ecuaciones

$$(18) \left\{ \begin{aligned} &\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma = 0 \\ &\lambda \frac{da}{dt} + \mu \frac{db}{dt} + \nu \frac{dc}{dt} + \rho \left(\lambda \frac{d\alpha}{dt} + \mu \frac{d\beta}{dt} + \nu \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

La primera ecuacion muestra que el plano tanjente en un punto contiene, como era natural, toda la jeneratriz que pasa por este punto i la segunda muestra que la orientacion del plano tanjente varía con ρ, es decir con la posicion del punto sobre la jeneratriz.

Estudiaremos la lei de esta variacion. Consideremos, la jeneratriz AB i supongamos que el punto A se haya elejido de tal manera que la perpendicular comun a AB i $A'B'$ pase por este punto; deberemos hacer entónces $R=0$ en las fórmulas (17); ellas se reducen entónces a los siguientes

$$\alpha_2 \frac{d\sigma}{dt} = \frac{da}{dt}$$

$$\beta_2 \frac{d\sigma}{dt} = \frac{db}{dt}$$

$$\gamma_2 \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dc}{dt}$$

Reemplacemos, en (19), las derivadas de a, b, c por estos valores i las derivadas de α, β, γ por los valores (16) tendremos

$$\frac{d\sigma}{dt}(\lambda\,\alpha_2+\mu\,\beta_2+\nu\,\gamma_2)+\rho\,\frac{d\epsilon}{dt}(\lambda\,\alpha_1+\mu\,\beta_1+\nu\,\gamma_1)=0$$

El plano tanjente en el punto A es el plano BAA' determinado por las direcciones α, β, γ; α_2 β_2, γ_2; sea θ el ángulo del plano tanjente en M con el plano tanjente en A, tendremos

$$\lambda\,\alpha_2+\mu\,\beta_2+\nu\,\gamma_2=-\operatorname{sen}\theta$$
$$\lambda\,\alpha_1+\mu\,\beta_1+\nu\,\gamma_1=+\cos\theta$$

Luego

$$\operatorname{tg}\theta=\rho\,\frac{d\epsilon}{d\sigma}.$$

En los puntos de una misma jeneratriz $\frac{d\epsilon}{dt}$ es constante, luego la tanjente del ángulo θ varía proporcionalmente a ρ i el plano tanjente jira de un ángulo total de 180° cuando el punto M recorre toda la jeneratriz.

El ángulo θ quedará invariable si $d\epsilon=0$ o si $d\sigma=0$; en el primer caso, las dos jeneratrices AB i $A'B'$ son paralelas i, en el segundo, su distancia es igual a cero; en los dos casos, como se ve, las dos jeneratrices infinitamente próximas están en un mismo plano.

SUPERFICIES DESARROLLABLES

Estas superficies constituyen una clase mui importante de las superficies regladas; en ellas, cada jeneratriz corta la jeneratriz infinitamente próxima o, mas bien dicho, la distancia $d\sigma$ de dos jeneratrices infinitamente próximas es infinitamente pequeña respecto de la variacion dt del parametro.

Segun esto, el valor de $\dfrac{d\sigma}{dt}$ es nulo para todas las jeneratrices i las ecuaciones (17) se reducen a las siguientes

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{da}{dt}+R\,\frac{d\alpha}{dt}=0\\ &\frac{db}{dt}+R\,\frac{d\beta}{dt}=0\\ &\frac{dc}{dt}+R\,\frac{dc}{dt}=0\end{aligned}\right.$$

R es la distancia contada sobre una jeneratriz, desde la curva $\rho=0$, del punto de interseccion de esta jeneratriz con otra infinitamente próxima.

De estas fórmulas se deduce

$$(20)\qquad \frac{da}{d\alpha}=\frac{db}{d\beta}=\frac{dc}{d\gamma}=-R$$

Esta es la *relacion característica* de las superficies regladas desarollables; en efecto, las ecuaciones de dos jeneratrices infinitamente próximas son

$$
\begin{aligned}
x&=a+\alpha\rho & x&=a+da+(\alpha+d\alpha)\,r\\
y&=b+\beta\rho & y&=b+db+(\beta+d\beta)\,r\\
z&=c+\gamma\rho & z&=c+dc+(\gamma+d\gamma)\,r
\end{aligned}
$$

Para que ellas se corten es necesario que estas seis ecuaciones, entre las cinco incógnitas x, y, z, ρ, r sean compatibles; eliminamos en primer lugar x, y, z, tendremos las tres ecuaciones

$$
\begin{aligned}
da+r\,d\alpha+\alpha\,(r-\rho)&=0\\
db+r\,d\beta+\beta\,(r-\rho)&=0\\
dc+r\,d\gamma+\gamma\,(r-\rho)&=0
\end{aligned}
$$

Multipliquemos respectivamente por α, β, γ i sumamos, obtendremos

$$r-\rho=0$$

i, en seguida

$$-r=\frac{da}{d\alpha}=\frac{db}{d\beta}=\frac{dc}{d\gamma}$$

Las ecuaciones (20) espresan que estos tres valores de r son iguales entre sí, por consiguiente, que las jeneratrices infinitamente próximas se cortan.

Plano tanjente

Las ecuaciones (18) que definen los cosenos directores de la normal en un punto de una superficie reglada cualquiera se simplifican si se toma en cuenta la relacion (20) i se obtiene

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda\, \alpha + \mu\, \beta + \nu\, \gamma = 0 \\ \lambda \dfrac{d\alpha}{dt} + \mu \dfrac{d\beta}{dt} + \nu \dfrac{d\gamma}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

Los valores de λ, μ, ν que resultan de estas ecuaciones dependen solo de t, luego el plano tanjente es el mismo en todos los puntos de una misma jeneratriz.

Línea de retroceso

Se llama *línea de retroceso* el lujar jeométrico de los puntos de interseccion consecutivos de las jeneratrices. Hemos designado por R la distancia, a la curva $\rho = 0$ del punto de encuentro de dos jeneratrices infinitamente próximas, luego, sobre cada jeneratriz el punto de la línea de retroceso será aquel cuyo valor de ρ es igual a R. En otros términos, las ecuaciones de la línea de retroceso son

$$x = a + \alpha\, R$$
$$y = b + \beta\, R$$
$$z = c + \gamma\, R$$

Ademas el valor de R es determinado sobre cada jeneratriz i su valor en funcion de t es dado por una cualquiera de las fórmulas (19).

Busquemos la tanjente en un punto de esta línea, tendremos

$$
\begin{aligned}
dx &= da + R\,d\alpha + \alpha\,dR \\
dy &= db + R\,d\beta + \beta\,dR \\
dz &= dc + R\,d\gamma + \gamma\,dR
\end{aligned}
$$

O bien, segun (19)

$$
\begin{aligned}
dx &= \alpha\;dR \\
dy &= \beta\,dR \\
dz &= \gamma\,dR
\end{aligned}
$$

Luego *la tanjente, en cada punto de la línea de retroceso, es la jeneratriz que pasa por este punto.*

Sean tambien ξ, η, ξ los cosenos directores de la normal al plano osculador en un punto de la línea de retroceso; estos cosenos están determinados por las relaciones

$$
\begin{aligned}
\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz &= 0 \\
\xi\,d^2x + \eta\,d^2y + \zeta\,d^2z &= 0
\end{aligned}
$$

Se tiene ahora

$$
\begin{aligned}
d^2x &= \alpha\,d^2R + d\alpha\,dR \\
d^2y &= \beta\,d^2R + d\beta\,dR \\
d^2z &= \gamma\,d^2R + d\gamma\,dR
\end{aligned}
$$

Al sustituir se encuentra simplemente

$$
\begin{aligned}
\xi\,\alpha + \eta\,\zeta + \zeta\,\gamma &= 0 \\
\xi\,d\alpha + \eta\,d\beta + \zeta\,d\gamma &= 0
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones, comparadas con (21), muestran que *el plano osculador en cada punto de la línea de retroceso es el plano tanjente a la superficie desarrollable en el mismo punto.*

Propiedad característica de las superficies desarrollables

Hemos visto, mas arriba, que los cosenos directores λ, μ, ν de la normal, en cada punto de una superficie desarollable, son funciones de un solo parametro variable t. Esta propiedad es característica de estas superficies.

En efecto, las coordenadas de los puntos de esta superficie podrán siempre espresarse en funcion del parametro t i de otro parametro ρ, de tal manera que se tendrá

$$(22) \qquad \begin{cases} x=f_1\ (t, \rho) \\ y=f_2\ (t, \rho) \\ z=f_3\ (t, \rho) \end{cases}$$

Los cosenos directores de la normal en un punto son definidos por la ecuacion jeneral

$$\lambda\, dx+\mu\, dy+\nu\, dz=0$$

en la cual dx, dy, dz son las proyecciones de un cambio de lugar cualquiera sobre la superficie; luego si en esta última ecuacion se reemplazan x, y, z por sus valores (22) la nueva ecuacion deberá ser satisfecha cualesquiera que sean dt i $d\rho$; de ahí se deducen las dos ecuaciones siguientes

$$(23) \qquad \begin{cases} \lambda \dfrac{\partial x}{\partial t} + \mu \dfrac{\partial y}{\partial t} + \nu \dfrac{\partial z}{\partial t} = 0 \\[2ex] \lambda \dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \mu \dfrac{\partial y}{\partial \rho} + \nu \dfrac{\partial z}{\partial \rho} = 0 \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones bastan precisamente para definir los tres cosenos λ, μ, ν; derivamos la primera respecto a ρ i la segunda respecto a t i observamos que, por hipótesis λ, μ, ν dependen solo de t, tendremos

$$\lambda \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \rho} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \rho} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial \rho} = 0$$

$$\lambda \frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial t} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial \rho \partial t} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial t} + \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial x}{\partial \rho}$$

$$+ \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{d\nu}{dt} \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0$$

Al restar estas dos ecuaciones tenemos simplemente

$$(24) \qquad \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{d\nu}{dt} \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0$$

Sean ahora α, β, γ, los cosenos directores de la interseccion de dos planos tanjentes infinitamente próximos, estos cosenos satisfacen a las relaciones

$$\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=0$$

$$\alpha\frac{d\lambda}{dt}+\beta\frac{d\mu}{dt}+\gamma\frac{d\nu}{dt}=0$$

Luego si se comparan estas últimas ecuaciones con la primera de las ecuaciones (23) i con (24) se obtiene

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial \rho}}{\alpha}=\frac{\frac{\partial y}{\partial \rho}}{\beta}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \rho}}{\gamma}$$

Esto quiere decir que, en todos los puntos de una curva $t=$const. la tanjente tiene una direccion constante representada por α, β, γ. La curva $t=$const. es, por consiguiente, una recta cuyos coeficientes angulares son α, β, γ i las ecuaciones (22) deben tener la forma

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=a+\alpha\rho\\ y&=b+\beta\rho\\ z&=c+\gamma\rho \end{aligned}\right.$$

La superficie es por consiguiente *reglada*.

Ahora el plano tanjente queda el mismo en todos los puntos de una jeneratriz, puesto que λ, μ, ν dependen solo de t; luego la superficie reglada es desarrollable.

Una superficie desarrollable es la envolvente de un plano móvil

Consideremos en efecto la ecuacion de la superficie bajo la forma (25), se sabe que los cosenos directores λ, μ, ν de la normal en un punto cualquiera satisfacen a las relaciones

$$
26 \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lambda \frac{da}{dt} + \mu \frac{d\beta}{dt} + \nu \frac{d\lambda}{dt} = 0 \\ &\lambda \frac{da}{dt} + \mu \frac{dB}{dt} + \nu \frac{dc}{dt} = 0 \end{aligned} \right.
$$

De la primera se deduce

$$
a \frac{d\lambda}{dt} + \beta \frac{d\mu}{dt} + \gamma \frac{d\nu}{dt} = 0
$$

Multipliquemos respectivamente las ecuaciones (25) por λ μ, ν i sumamos; tendremos

$$
(27) \qquad \lambda x + \mu\lambda + \nu z = \lambda a + \mu b + \nu c
$$

Multipliquemos ahora por $\frac{d\lambda}{dt}$, $\frac{d\mu}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$ i sumamos; tendremos

$$
\frac{d\lambda}{dt} x + \frac{d\mu}{dt} y + \frac{d\nu}{dt} z = \frac{d\lambda}{dt} a + \frac{d\mu}{dt} b + \frac{d\nu}{dt} c
$$

Se puede agregar, en el segundo miembro, la espresion $\lambda \frac{da}{dt} + \mu \frac{db}{dt} + \nu \frac{dc}{dt}$ que, segun (26) es igual a cero; se obtiene entonces

$$\frac{d\lambda}{dt} x + \frac{d\mu}{dt} y + \frac{d\nu}{dt} z = \frac{d(\lambda a + \mu b + \nu c)}{dt} \tag{28}$$

Las ecuaciones (27) i (28) representan precisamente la envolvente del plano (27).

A. Obrecht

(Continuará)