CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

(Continuacion)

Sean M el punto de la hélice i m su proyeccion sobre el plano XOY; λ, μ, ν los cosenos directores de la normal principal en M a la hélice i λ', μ', ν' los de la normal, en m, a la seccion recta; r i r' los radios de curvatura de las dos curvas en M i m; se tiene

$$\lambda = r\,\frac{d^2x}{ds^2} \qquad \lambda' = r'\,\frac{d^2x}{d\sigma^2}$$

$$\mu = r\,\frac{d^2\mu}{ds^2} \qquad \mu' = r'\,\frac{d^2y}{d\sigma^2}$$

$$\nu = r\,\frac{d^2z}{ds^2} \qquad \nu' = 0$$

Luego segun (12),

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{\lambda'}{r'} \cos^2 \theta$$

$$\frac{\mu}{r} = \frac{\mu'}{r'} \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\frac{\nu}{r} = 0$$

De estas ecuaciones se deduce

$$\lambda = \lambda'$$

$$\mu = \mu$$

$$\nu = 0$$

$$r = \frac{r'}{\cos^2 \theta}$$

Se ve que la normal principal en M a la hélice es paralela a la normal en m a la seccion recta.

Sean tambien α, β, γ los cosenos directores de la tanjente a la hélice en M i α', β', γ' los de la tanjente a la seccion recta en m se tiene

$$\alpha = \frac{dx}{ds} \qquad \alpha' = \frac{dx}{d\sigma}$$

$$\beta = \frac{dy}{ds} \qquad \beta' = \frac{dy}{d\sigma}$$

$$\gamma = \frac{dz}{ds} \qquad \gamma' = 0$$

Luego, segun (12),

$$\alpha = \alpha' \cos\theta$$

$$\beta = \beta' \cos\theta$$

$$\gamma = \operatorname{sen}\theta$$

Sean ahora ξ, η, ζ los cosenos directores de la binormal en M a la hélice, se tendrá

$$\xi = \beta\nu - \gamma\mu = -\mu' \operatorname{sen}\theta$$

$$\eta = \gamma\lambda - \alpha\nu = +\lambda' \operatorname{sen}\theta$$

$$\zeta = \alpha\mu - \beta\lambda = \cos\theta\,(\alpha'\mu' - \beta'\lambda')$$

Pero los cosenos λ', μ' de la normal a la seccion recta en m son respectivamente iguales a $-\beta'$ i $+\alpha'$, luego

$$\xi = -\alpha' \operatorname{sen}\theta$$

$$\eta = -\beta' \operatorname{sen}\theta$$

$$\zeta = \cos\theta$$

De aquí se deduce

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{d\alpha'}{ds}\operatorname{sen}\theta = -\frac{d\alpha'}{d\sigma}\cos\theta\operatorname{sen}\theta = -\lambda\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r'}$$

$$\frac{d\eta}{ds} = -\frac{d\beta'}{ds}\operatorname{sen}\theta = -\frac{d\beta'}{d\sigma}\cos\theta\operatorname{sen}\theta = -\mu\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r'}$$

$$\frac{d\zeta}{ds} = 0$$

Al comparar estas últimas fórmulas con (4) se obtiene

$$\rho = \frac{r'}{\text{sen } \theta \cos \theta}$$

Se ve que la razon $\frac{r}{\rho}$ de los radios de curvatura i de torsion es constante e igual a $tg\ \theta$, es decir a la razon entre el z de un punto de la hélice i el arco correspondiente σ de la seccion recta.

Recíprocamente, *si en todos los puntos de una curva la razon entre los radios de curvatura i de torsion es constante, esta curva es una hélice.*

En efecto, si esta razon es constante, se deduce de las ecuaciones (2) i (4), siendo k una constante,

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{d\eta}{d\beta} = \frac{d\zeta}{d\gamma} = K$$

Luego

$$\xi = \alpha K + A$$

$$\eta = \beta K + B$$

$$\zeta = \gamma K + C$$

A, B, C son tres constantes. Multipliquemos respectivamente estas ecuaciones por λ, μ, ν i sumamos, obtendremos

$$A\lambda + B\mu + C\nu = 0$$

O bien

$$A \frac{d^2x}{ds^2} + B \frac{d^2y}{ds^2} + C \frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

Por consiguiente

$$A \frac{dx}{ds} + B \frac{dy}{ds} + C \frac{dz}{ds} = C^{te}$$

Luego *la tanjente, en un punto cualquiera de la curva, hace un ángulo constante con una direccion fija.*

Esta es precisamente la *propiedad característica* de la hélice; en efecto elejimos los ejes de coordenadas de tal manera que OZ coincide con la direccion fija, tendremos, en todos los puntos de la curva

$$\frac{dz}{ds} = \text{sen}\ \theta$$

siendo θ un ángulo constante; de ahí se deduce

$$\frac{dx^2 + dy^2}{ds^2} = 1 - \text{sen}^2\ \theta = \cos^2\ \theta$$

Sea $d\sigma$ la proyeccion de ds en el plano XOY, se tendrá

$$d\sigma = ds \cos\theta$$

Luego tambien

$$dz = d\sigma \operatorname{tg} \theta$$

O bien, si se cuentan los σ desde el punto en que $z=0$,

$$z = \sigma \operatorname{tg} \theta$$

La curva es, por consiguiente, una hélice.

CAPÍTULO II

DEL PLANO TANJENTE A LAS SUPERFICIES

Las tanjentes a todas las curvas que, sobre una superficie, pasan por un punto dado están contenidas en un mismo plano.

Sean, en efecto, M un punto de una superficie S i AB una curva cualquiera, situada sobre la superficie, i que pasa por M; x, y, z las coordenadas de M i $F(x, y, z)=0$ la ecuacion de S; M' otro punto de AB, infinitamente próximo de M, i x', y', z' sus coordenadas; Δc la cuerda MM' i $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ los cosenos directores de Δc; se tiene en primer lugar

$$\begin{aligned} x' &= x + \alpha' \Delta c \\ y' &= y + \beta' \Delta c \\ z' &= z + \gamma' \Delta c \end{aligned}$$

Por otra parte, como los puntos M i M' están sobre S, sus coordenadas satisfacen a las ecuaciones

$$F(x, y, z) = 0$$

$$F'(x', y', z') = 0$$

Ahora, el teorema de Taylor da

$$F(x' y' z') = F(x, y\, z) + \Delta c \left(\alpha' \frac{\partial F}{\partial x} + \beta' \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial F}{\partial z} \right) +$$

$$\textit{inf. peq. de órd. sup. a } \Delta c$$

El primer miembro i el primer término del segundo son nulos; los demas términos tienen Δc en factor; podemos por consiguiente dividir por Δc i escribir

$$0 = \alpha' \frac{\partial F}{\partial x} + \beta' \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial F}{\partial z} + \textit{térm. infi. pequeños.}$$

Cuando Δc tiende hácia cero, la secante $M M'$ tiende a confundirse con la tanjente $M T$ a la curva $A B$; sean α, β, γ los cosenos directores de $M T$. Hagamos $\Delta c = 0$ en la fórmula anterior; se deberán reemplazar α' β' γ' por α, β, γ i los términos infinitamente pequeños por cero, luego se tendrá rigorosamente, en el límite,

$$(1) \qquad \alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Podemos determinar tres cosenos λ, μ, ν de tal manera que

$$(2) \qquad \frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\mu}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\nu}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

La ecuacion (1) da entónces

$$(3) \qquad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$$

Sea $M\,N$ una recta cuyos cosenos directores son λ, μ, ν; la ecuacion (3) muestra que la tanjente $M\,T$ es perpendicnlar a $M\,N$; ahora la direccion de $M\,N$ depende solo (segun 2) de los valores que tienen, en el punto M, las tres derivadas parciales de la funcion F, luego la propiedad jeométrica representada por la fórmula (3) es comun a todas las curvas de la superficie S que pasan por el punto M i las tanjentes a todas estas curvas son contenidas en un mismo plano perpendicular a $M\,N$; este plano es el *plano tanjente* a la superficie S en el punto M i la recta $M\,N$ es la *normal* en el mismo punto.

Sean X, Y, Z las coordenadas variables, la ecuacion del plano tanjente en el punto $M\,(x, y, z)$ es evidentemente

$$\lambda\,(X-x) + \mu\,(Y-y) + \nu\,(Z-z) = 0$$

O bien

$$(X-x)\,\frac{\partial F}{\partial x} + (Y-y)\,\frac{\partial F}{\partial y} + (Z-z)\,\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Del mismo modo las ecuaciones de la normal son

$$\frac{X-x}{\lambda}=\frac{Y-y}{\mu}=\frac{Z-z}{\nu}$$

O bien

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Cuando la ecuacion de la superficie tiene la forma

$$z=\phi\ (x, y)$$

los cosenos directores λ, μ, ν de la normal son dados evidentemente por las ecuaciones

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial \phi}{\partial x}}=\frac{\mu}{\frac{\partial \phi}{\partial y}}=\frac{\nu}{-1}$$

O bien

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{\mu}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{\nu}{-1}$$

PROPIEDADES CARACTERÍSTICAS DE LOS PLANOS TANJENTES A ALGUNAS SUPERFICIES

Superficies de revolucion

Consideremos una superficie de revolucion al rededor de OZ; cuando se corta la superficie por un plano

$$z = h$$

se obtiene, como interseccion una circunferencia i su proyeccion sobre XOY tiene por ecuacion

$$x^2 + y^2 = r^2$$

La ecuacion jeneral de estas superficies será, por consiguiente, una relacion cualquiera entre r i h, tal como

$$F(r, h) = 0$$

Si, en esta ecuacion, se supone r i h reemplazados por su valor en funcion de x, y, z se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}\,\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r}\,\frac{y}{r}$$

De ahí se deduce

$$(5) \qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{y}$$

O bien

$$\frac{\lambda}{x} = \frac{\mu}{y}$$

Esta última ecuacion espresa que la normal en cada punto de la superficie corta el eje OZ.

Recíprocamente, la ecuacion (5) es característica de las superficies de revolucion al rededor de OZ. Sea en efecto

$$F(x y z) = 0$$

la ecuacion de una superficie que satisface a la relacion (5), cortemos esta superficie por un plano $z = C^{te}$, los puntos de la curva de interseccion satisfarán a la ecuacion diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

O bien, segun (5), a la ecuacion

$$x\, dx + y\, dy = 0$$

La integracion es evidente i se obtiene

$$x^2+y^2=C^{te}$$

Es la ecuacion de una circunferencia cuyo centro está sobre OZ; la superficie $F(x\,y\,z)=0$ es por consiguiente de revolucion al rededor de OZ.

A. OBRECHT

(Continuará)