MECÁNICA RACIONAL

SEGUNDA PARTE

DE LOS SISTEMAS MATERIALES

(Continuacion)

Teorema.

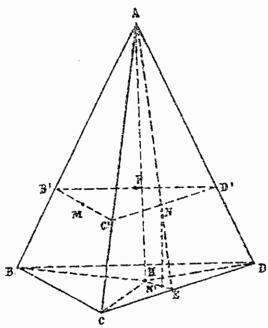
Un sólido invariable sometido a una presion constante, normal a su superficie está en equilibrio.

Un sólido invariable cualquiera puede ser considerado como el límite de un poliedro de un número infinito de caras; este poliedro a su vez puede ser considerado como la reunion de tetraedros justapuestos, luego basta demostrar que un tetraedro de forma invariable, sometido a una presion normal constante queda en equilibrio.

Sea (fig. 59) un tetraedro $ABCD$; la presion normal que obra sobre cada una de las caras, es equivalente a una fuerza normal a esta cara, proporcional a su área i aplicada en su centro de gravedad. Así, por ejemplo, la presion normal que obra sobre la cara ACD, es equivalente a una fuerza F aplicada en el centro de gravedad N i proporcional al área del triángulo ACD.

Descompogamos F en dos componentes: una F_1 perpendicular a BCD, la otra F_2 paralela al mismo plano. Sea AH la perpendicular bajada desde A sobre BCD: 1.° la componente F_1 será proporcional al área del triángulo HCD i su línea de accion encontrará BCD en el punto N' proyeccion de N; este punto N' es precisamente el centro de gravedad del triángulo HCD; 2.° la componente F_2 será proporcional al área de un triángulo de base CD i de altura AH.

Fig. 59.

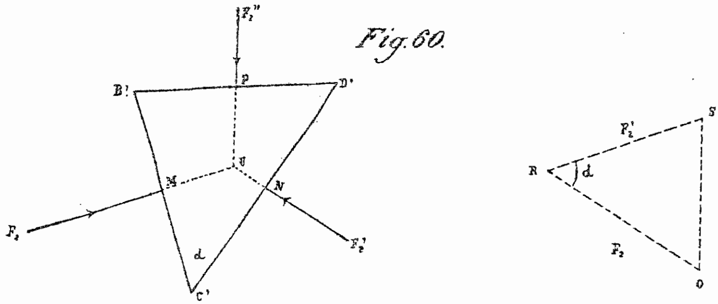


Hagamos la misma descomposicion para las fuerzas F' i F'', aplicadas en M i P, centros de gravedad de ABC i ABD; tendremos entónces: 1.° tres componentes F_1 $F_1{}'$ $F_1{}''$ perpendiculares a BCD, proporcionales a las áreas de los triángulos HCD, HCB, HBD i aplicadas en sus centros de gravedad respectivos; estas tres fuerzas paralelas son equivalentes a una sola fuerza, aplicada en el centro de gravedad del triángulo BCD i proporcional al área de este último triángulo; esta última fuerza, como se ve, equilibra la presion normal de la cara BCD; 2.° las tres componentes F_2 $F_2{}'$ $F_2{}''$ son paralelos al plano BCD o al plano B' C' D'; cada fuerza es proporcional al área de un triángulo de altura constante AH i de base DC, CB o BD, luego, estas tres fuerzas son tambien proporcionales a los lados $D'C'$, $C'B'$ $B'D'$ del triángulo $B'C'D'$; ellas son, ademas, perpendiculares a estos lados i aplicadas en los puntos medios.

Para demostrar que estas fuerzas se hacen equilibrio, notaremos primero que sus líneas de accion se cortan en un mismo punto U, centro del círculo circunscrito al triángulo $B'C'D'$; basta, por consiguiente, que el polígono de estas tres fuerzas se cierre para que ellas se hagan equilibrio.

Por un punto O cualquiera, tracemos un vector OR igual a F_2 i, por el punto R otro vector RS igual a F'_2, el ángulo ORS es igual al ángulo $D'CB'$ del triángulo $B'C'D'$; como, por otra parte, F_2 i F_2' son proporcionales a $C'D'$ i $C'B'$, se ve que los triángulos ORS i $B'C'D'$ son semejantes; luego tambien SO

Fig. 60.



representa la fuerza F_2''; esto demuestra que las tres fuerzas F_2 F_2' F_2'' se hacen equilibrio.

Sea lo que fuera, dejaremos a un lado, en lo que sigue, la consideracion de las acciones moleculares i admitiremos que el principio de Arquímedes es la espresion exacta de lo que pasa en la realidad.

Condiciones de estabilidad del equilibrio de los cuerpos flotantes

Se ha demostrado, en el Capítulo IV, que el equilibrio de un cuerpo es estable cuando la suma de los trabajos virtuales de todas las fuerzas que obran sobre él queda siempre negativa, cualesquiera que sean los cambios de lugar virtuales, compatibles con los ligazones del cuerpo.

Un cambio de lugar del cuerpo flotante enjendrará en el líquido ciertas acciones moleculares, pero dejaremos a un lado el trabajo de estas últimas fuerzas.

Consideremos entónces el cuerpo como un sólido invariable: un movimiento cualquiera de este sólido, podrá siempre descomponerse en una traslacion i una rotacion, pero una traslacion horizontal i una rotacion al rededor de un eje vertical, no hacen trabajar las fuerzas que obran sobre el cuerpo, puesto que estas son equivalentes a dos fuerzas verticales; luego, bastará considerar, como cambio de lugar mas jeneral, una traslacion vertical i una rotacion al rededor de un eje horizontal; todavía estos dos movimientos pueden reemplazarse por una sola rotacion al rededor de un eje horizontal situado en el plano del nivel superior del líquido.

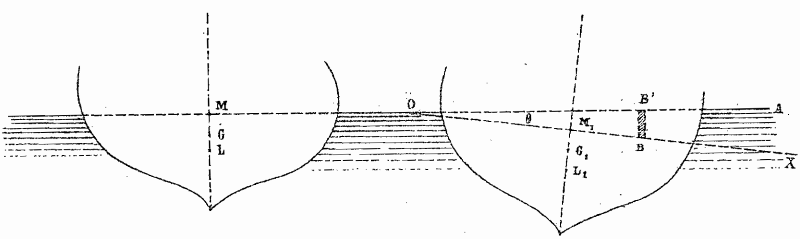
En resúmen: el equilibrio del cuerpo flotante será estable si el trabajo de las fuerzas que obran sobre él es negativo respecto de una rotacion al rededor de un eje cualquiera, situado en el plano del nivel superior del líquido.

El trabajo elemental dT de una fuerza F, correspondiente a una rotacion $d\theta$ del punto de aplicacion al rededor de un eje, es igual al producto de $d\theta$ por el momento de la fuerza F respecto al eje; sea en el caso considerado, θ el ángulo de la rotacion i $d\theta$ un incremento infinitamente pequeño de θ, dT el trabajo elemental de las fuerzas respecto de la rotacion $d\theta$ se tendrá

$$dT = d\theta \, \Sigma M^t \, F \tag{12}$$

Sean (fig. 61) G el centro de gravedad del cuerpo flotante, P su peso, L el centro de gravedad del fluido desplazado o

Fig. 61.



centro de carena i V su volúmen, π el peso de la unidad de volúmen del líquido; en el estado de equilibrio se tiene

$$P = V\pi \tag{13}$$

Llamaremos a la distancia GL de los dos centros de gravedad; consideraremos a positivo si G es encima de L i negativo si G es debajo de L.

Representemos el cuerpo flotante cuando ha tenido una rotacion θ al rededor de un eje horizontal OY situado en el plano del nivel superior del líquido; sea OX un eje perpendicular sobre OY; G_1, L_1 las nuevas posiciones de G, L i M_1 el punto de encuentro de L_1 G_1 con OX; las dos fuerzas iguales i verticales, aplicadas en G_1 i L_1 forman un par, luego la suma de los momentos de estas dos fuerzas, respecto a OY, es el momento de este par, es decir

$$V\Pi\, a \operatorname{sen} \theta$$

Ahora, el cuerpo se ha hundido en el líquido, el volúmen de líquido desplazado se ha aumentado i la accion correspondiente sobre el cuerpo equivale a un empuje vertical igual al aumento de peso del líquido desplazado i dirijido desde abajo hácia arriba.

Sea BB' un cilindro vertical infinitamente delgado; $d\omega$ el área de su seccion por el plano XOY i x la distancia OB, el peso de la masa equivalente de líquido es

$$\Pi d\omega \cos \theta .\, BB'$$

i el momento respecto a OY del empuje correspondiente sobre el cuerpo

$$-\Pi\, d\omega \cos \theta .\, BB' \times OB' = -\Pi \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta\, x^2\, d\omega$$

Luego

$$\Sigma\, M^t\, F = V\Pi a \operatorname{sen} \theta - \Pi \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta\, \Sigma\, x^2 d\omega$$

Sea I el momento de inercia del área de la seccion mojada respecto a OY se tiene tambien

$$\Sigma\, M^t\, F = \Pi \operatorname{sen} \theta\, (Va - I \cos^2 \theta) = \frac{dT}{d\theta}$$

Si θ es mui pequeño se puede escribir

$$\frac{dT}{d\theta} = \Pi\, \theta\, (Va - I)$$

Luego

$$T = \Pi \frac{\theta^2}{2} (Va - I)$$

La condicion de estabilidad es, por consiguiente

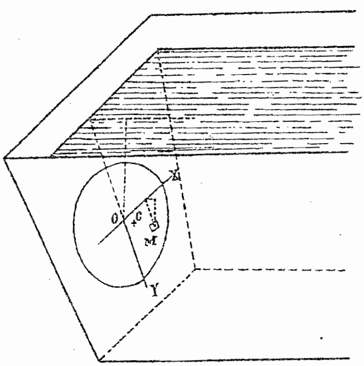
$$(14) \qquad Va - I < 0$$

Esta condicion es siempre satisfecha si a es negativo, es decir si el centro de gravedad G del cuerpo es mas abajo que el centro de gravedad L del fluido desplazado; pero si a es positivo, es decir, si G está encima de L es necesario que el momento de inercia I sea mayor que Va, para que la condicion (14) sea satisfecha.

El eje respecto del cual el momento de inercia de la seccion mojada es mínimo, es uno de los ejes principales del centro de gravedad de esta seccion; luego, para que la estabilidad de un buque esté asegurada es necesario que el momento de inercia mínimo de la seccion mojada sea mayor que el producto Va.

En los submarinos no pasa lo mismo, pues, no hay entónces seccion mojada i es indispensable que a sea negativo; es decir, que el centro de gravedad del submarino sea debajo del centro de gravedad del líquido desplazado.

Fig. 62.



Presiones sobre las paredes planas

Consideremos (fig. 62) una porcion de pared plana, limitada por una curva cerrada cualquiera de área Ω. Cada elemento de área $d\omega$ es sometido a una presion normal p i se trata de determinar la resultante de las fuerzas paralelas $pd\omega$ que obran en todos los puntos del área Ω.

Referimos los puntos de la pared a dos ejes de coordenadas situados en su plano i cuyo oríjen es el centro de gravedad O del área: uno de las ejes OX es horizontal, el otro, OY, perpendicular al primero, es decir, dirijido segun la línea de mayor pendiente de la pared; sean x, y las coordenadas de un punto M, θ el ángulo de la pared plana con el horizonte i h la distancia del punto O al plano del nivel superior del líquido; la distancia del punto M al mismo plano será evidentemente

$$h + y \operatorname{sen} \theta$$

Sea p_0 la presion del líquido en el nivel superior, la presion en M será

$$p = p_0 + \Pi (h + y \operatorname{sen} \theta)$$

Luego la presion total P sobre el área Ω será

$$P = \Sigma p \, d\omega = \Sigma \left\{ p_0 + \Pi (h + y \operatorname{sen} \theta) \right\} d\omega$$

Como O es el centro de gravedad del área, la espresion anterior se reduce a

$$P = p_0 + \Pi h) \Omega$$

La espresion $p_0 + \Pi h$ es la presion en el centro de gravedad de Ω, luego *la presion total P es el producto del área Ω por la presion en el centro de gravedad.*

Sea ahora C el punto de aplicacion de la presion total P i x_1, y_1 las coordenadas de C; este punto es el *centro de presion* del área Ω, se tendrá, por medio de los momentos.

$$P x_1 = \Sigma p x d\omega$$

$$P y_1 = \Sigma p y d\omega$$

O bien, si se reemplaza p por su valor

$$P x_1 = \Sigma (p_0 + \Pi h + \Pi y \operatorname{sen} \theta) x \, d\omega = \Pi \operatorname{sen} \theta \, \Sigma x y d\omega$$

$$P y_1 = \Sigma (p_0 + \Pi h + \Pi y \operatorname{sen} \theta) y \, d\omega = \Pi \operatorname{sen} \theta \, \Sigma y^2 \, d\omega$$

Supongamos que el eje OY sea un eje de simetría del área Ω, se tendrá

$$\Sigma x y d\omega = 0$$

Luego x es igual a cero i el centro de presion se encuentra sobre la línea de mayor pendiente del centro de gravedad.

Sea ΩK^2 el momento de inercia del área respecto del eje principal OX, se tendrá tambien

$$y_1 = \frac{\Omega K^2 \Pi \operatorname{sen} \theta}{P} = \frac{K^2}{\frac{p_0}{\Pi} + h} \operatorname{sen} \theta$$

Para que el centro de presion se confunda con el centro de gravedad, es necesario que $\theta = 0$, o bien $h = \infty$, en jeneral, la distancia y_1 disminuye a medida que la profundidad h aumenta

Forma de equilibrio de un líquido pesado animado de una rotacion de velocidad angular constante al rededor de un eje vertical.

Una vez el líquido en equilibrio sólido, se pueden aplicar las fórmulas jenerales establecidas en el caso del reposo a la condicion de agregar a las fuerzas esteriores, las fuerzas de inercia de todos los puntos.

Sean x, y, z las coordenadas del punto M, OZ el eje de rotacion dirijido desde abajo hacia arriba, ω la velocidad angular constante i r la distancia de M a OZ. La fuerza que obliga la unidad de masa situada en M a jirar al rededor de OZ con la velocidad angular constante ω es dirijida desde M hácia OZ i su intensidad es $\omega^2 r$, luego la fuerza de inercia del mismo punto es dirijida desde OZ hácia M i su intensidad es tambien $\omega^2 r$, las fuerzas esteriores se reducen aquí a la gravedad, luego se tiene

$$\gamma_x = \omega^2 r \frac{x}{r} = \omega^2 x$$

$$\gamma_y = \omega^2 r \frac{y}{r} = \omega^2 y$$

$$\gamma_z = -g$$

De ahí se deduce la siguiente ecuacion diferencial de las superficies de nivel

$$\gamma_x\, dx + \gamma_y\, dy + \gamma_z\, dz = \omega^2 (x dx + y dy) - g\, dz = 0$$

La integracion es evidente i se obtiene

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz = C$$

Luego las superficies de nivel paraboloídes de revolucion al rededor del eje de rotacion OZ.

Caso de un líquido pesado animado de una rotacion de velocidad angular constante al rededor de un eje horizontal.

Sea OZ el eje de rotacion i, en un momento t, θ el ángulo que hace el eje OX con la vertical descendiente; el ángulo θ varía uniformemente con el tiempo i se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

Las tres proyecciones de la fuerza g son ahora: $g \cos\theta$ sobre OX, $-g$ sen θ sobre OY i cero sobre OZ; sea todavia r la distancia del punto M al eje de rotacion; la fuerza de inercia del punto es $\omega^2 r$ i sus proyecciones sobre los ejes móviles son: $\omega^2 x$ sobre OX, $\omega^2 y$ sobre OY i cero sobre OZ. Se tiene por consiguiente

$$\gamma_x = g \cos\theta + \omega^2 x$$

$$\gamma_y = -g \operatorname{sen}\theta + \omega^2 y$$

$$\gamma_z = 0$$

Luego

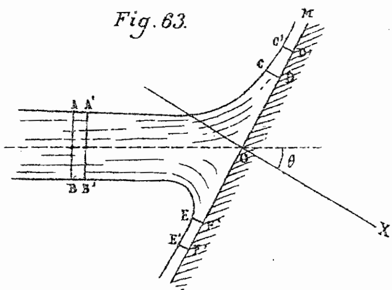
$$dp = \rho \left\{ g (dx \cos\theta - dy \operatorname{sen}\theta) + \omega^2 (x dx + y dy) \right\}$$

En el segundo miembro figura el ángulo θ que varía con el tiempo, luego la presion en un punto cualquiera del líquido es funcion del tiempo i varía con él; el líquido mismo, *no puede quedar, por consiguiente, en equilibrio sólido.*

Presion resultante ejercitada por un chorro de agua sobre una pared plana

Consideremos una pared plana MN i un chorro de agua de seccion Ω i de velocidad V; sea θ el ángulo de V con la normal a la pared. Se observa que, los filetes líquidos, primitivamente rectos, se dirijen tanjencialmente a la pared, despues del choque. Consideremos la porcion de líquido, comprendida entre una seccion AB normal al chorro i un cilindro normal a la pared, representado por las jeneratrices CD, EF; en los puntos de este cilindro se puede considerar las velocidades de las moléculas líquidas como paralelas a la pared. Apliquemos una de las seis fórmulas fundamentales comunes a todos los sistemas materiales: la relativa a la suma de las proyecciones de las cantidades de movimiento sobre un eje

Fig. 63.



$$d \sum P^t_x mv = \sum P^t_x f dt$$

Elijamos como eje de proyeccion la normal OX a la pared; sea $A'B'$ la posicion de AB despues del tiempo dt; $C'D'$ i $E'F'$; las posiciones de CD i EF; como la velocidad de las moléculas comprendidas entre CD i $C'D'$; EF i $E'F'$ son perpendiculares, por hipótesis a OX, se tendrá

$$d \sum P^t_x mv = \rho \, \Omega \, V dt \times V \cos \theta = \rho \, V \Omega^2 dt \cos \theta$$

Si se desprecia la pesantez, las fuerzas esteriores son las presiones de la pared sobre el chorro, éstas tendrán una resultante F, paralela a OX, luego

$$\sum P^t_x f dt = F dt$$

Finalmente

$$F = \rho\,\Omega\,V^2 \cos\theta$$

Como se ve, F representa la resultante de todas las presiones.

CAPÍTULO XV

CONSIDERACIONES JENERALES SOBRE LA HIDRODINÁMICA

La hidrodinámica es la parte de la mecánica que se ocupa del movimiento de los fluidos.

Las ecuaciones jenerales de este movimiento se deducen jeneralmente del principio de d'Alembert; sin embargo, cuando se aplica a cada punto de un fluido una fuerza igual a su fuerza de inercia, el fluido no queda en equilibrio, ni siquiera durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, luego las presiones, en el fluido, no son las de una masa fluida en reposo i no satisfacen probablemente a las ecuaciones de la hidrostática. Por este motivo no daremos aquí las ecuaciones usuales que definen la presion en los puntos de un fluido en movimiento.

Ecuacion de continuidad

Cuando la masa de un fluido en movimiento queda contínua se puede establecer una ecuacion de condicion llamada ecuacion de continuidad. Consideremos la masa de fluido contenida en un elemento de volúmen $dx\,dy\,dz$, esta masa es

$$\rho\,dx\,dy\,dz$$

Sean x, y, z las coordenadas del punto considerado i v_x, v_y, v_z las proyecciones de su velocidad; durante el movimiento del fluido las coordenadas x, y, z se cambian en $x + v_x\,dt$, $x + v_y\,dt$, $z + v_z\,dt$; la densidad ρ varía con el tiempo i con la posicion del punto de tal manera que

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t}dt + \frac{\partial\rho}{\partial x}dx + \frac{\partial\rho}{\partial y}dy + \frac{\partial\rho}{\partial z}dz$$

O bien

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dt$$

De la misma manera, el lado dx del paralelipípedo se cambia en

$$x + dx + \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dt - \left[x + v_x\, dt \right] = dx \left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x}\, dt \right)$$

Luego se puede escribir

$$d(dx) = dx \frac{\partial v_x}{\partial x} dt$$

Ahora la masa de fluido $\rho\, dx\, dy\, dz$ debe llenar el paralelipípedo en su segunda posicion, luego la diferencial de esta espresion debe ser nula i se puede escribir

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{\partial (dx)}{\partial x} + \frac{\partial (dy)}{\partial y} + \frac{\partial (dz)}{\partial z} = 0$$

O bien

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

O todavía

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Esta es la *ecuacion de continuidad.*

Esta ecuacion puede obtenerse tambien de otra manera: consideremos, en el espacio recorrido por el fluido, un paralelipípedo infinitamente pequeño de volúmen $dx\, dy\, dz$. Para espresar que el fluido queda continuo escribiremos que, a cada momento, la masa del fluido contenido en el paralelipípedo $dx\, dy\, dz$ es igual al producto del volúmen por la densidad.

Durante el tiempo dt, la masa de fluido que entra por la cara $dy\,dz$ es

$$\rho\, v_x\, dt\, dy\, dz$$

i la masa que sale por la cara opuesta es

$$\left[\rho\, v_x + \frac{\partial(\rho\, v_x)}{\partial x} dx\right] dt\, dy\, dz$$

El aumento correspondiente de la masa del fluido es por consiguiente

$$-\frac{\partial(\rho\, v_x)}{\partial x} dt\, dx\, dy\, dz$$

Se obtendrian espresiones análogas en las otras dos direcciones, de suerte que el aumento total de la masa es

$$dm = -\left\{\frac{\partial(\rho\, v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\, v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, v_z)}{\partial z}\right\} dt\, dx\, dy\, dz$$

Por otra parte la densidad ρ se ha cambiado en

$$\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$$

Se debe tener por consiguiente

$$\rho\, dx\, dy\, dz + dm = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx\, dy\, dz$$

De ahí resulta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\, v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, v_z)}{\partial z} = 0$$

Es la ecuacion obtenida mas arriba.

En el caso de los fluidos incompresibles, ρ es constante i se tiene simplemente

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Supongamos que la velocidad del fluido en cada punto, tenga un potencial de tal manera que

$$v_x = \frac{\partial V}{\partial x}.$$

$$v_y = \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$v_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

La ecuacion de continuidad es entónces

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Es la *ecuacion de Laplace* obtenida en el caso del movimiento de los cuerpos celestes.

Enerjía potencial de un líquido incompresible.

Consideremos una masa contínua de líquido incompresible en reposo i un elemento de volúmen en dw, en un punto M; sea p la presion en este punto. Podemos concebir el líquido contenido en el elemento dw, como la reunion de puntos materiales ligados unos a otros por resortes hipotéticos; la enerjía potencial de estos resortes es evidentemente una funcion de p; ademas la enerjía potencial del elemento dw tiende hácia cero cuando dw tiende hácia cero i podemos admitir que el límite de la razon entre esta enerjía i dw es una funcion finita de la presion p en el punto M, de suerte que, en resúmen, la enerjía potencial del líquido contenido en el elemento dw tendrá una espresion como la siguiente

$$dw\ F(p)$$

Trataremos de determinar esta funcion $F(p)$. Para esto notaremos que el movimiento elemental que tomaría el elemento dw, por efecto de una impulsion cualquiera, es independiente de la fuerzas esteriores que obran sobre el líquido, pues estas fuerzas estan siempre equilibradas siempre por las presiones del líquido que envuelve dw, luego el trabajo de las fuerzas interiores no influye sobre la enerjía cinética del elemento dw. Debemos admitir entonces, para satisfacer al principio de la conservacion de la enerjía, que el trabajo de estas fuerzas se convierte en enerjia potencial, la cual queda almacenada por el líquido contenido en el elemento dw.

Sea γ la aceleracion de las fuerzas esteriores en el punto M, ρ la densidad del líquido i $MM' = dx$ un cambio de lugar del elemento dw; el trabajo elemental correspondiente de las fuerzas esteriores es

$$d\,\mathcal{T} = \rho\, dw\, \gamma\, dx \cos(\gamma, dx)$$

Como este trabajo debe trasformarse en enerjía potencial, en el elemento dw, se debe tener

$$d\,\mathcal{T} = d\left\{ dw\, F(p) \right\}$$

Pero el líquido es, por hipótesis, incompresible, luego dw es constante i se tiene

$$d\,\mathcal{T} = dw\, F'(p)\, dp$$

O bien, al reemplazar $d\,\mathcal{T}$ por su valor

$$F'(p)\, dp = \rho\, \gamma\, dx \cos(\gamma, dx)$$

La presion en M' es $p + dp$ i se ha establecido en la hidrostática la relacion

$$dp = \rho\, \gamma\, dx \cos(\gamma, dx)$$

Luego se debe tener

$$F'(p) = 1$$

O bien

$$F(p) = p + c$$

c es una constante, característica del líquido considerado.

En resúmen, el principio de la conservacion de la enerjía nos conduce a atribuir al elemento de líquido dw una enerjía potencial

$$dw\,(p+c)$$

Movimiento de los líquidos pesados.
Fórmula de Bernouilli.

Sea, en un punto M del líquido, p la presion i v la velocidad; consideremos en este punto un elemento de volúmen dw; la enerjía total de este elemento será

$$\frac{1}{2}\rho\ dw\ v^2 + (p+c)\,dw$$

Sea z la distancia, contada desde abajo hácia arriba, del punto M a un plano horizontal oríjen; cuando el volúmen dw pasa del punto M a otro punto M' situado a la distancia $z+dz$ del mismo plano, el trabajo de la pesantez es

$$-\rho\ dw\ gdz$$

Se debe tener, por consiguiente, segun el principio de la conservacion de la enerjía,

$$d\left\{\frac{1}{2}\rho\ dw\ v^2 + (p+c)\,dw\right\} = -\rho\ dw\ gdz$$

Dividamos los dos miembros por el factor constante $\rho g\,dw$ i pongamos $\rho g = \Pi$ tendremos

$$d\left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p+c}{\Pi}\right) + dz = 0$$

O bien

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p+c}{\Pi} + z = C^{te}$$

O todavia, puesto que c es una constante

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\Pi}+z=C^{te}$$

Esta es la ecuacion de *Bernouilli.*

Plano de carga.

Si, en cada punto del líquido en movimiento, se levanta una vertical de lonjitud igual a $\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\Pi}$ el lugar jeométrico de los puntos obtenidos es un plano horizontal: este se llama *plano de carga.*

Ademas se llama *carga* en el punto M, la cantidad

$$z+\frac{p}{\Pi}+\frac{v^2}{2g}$$

Esta cantidad es, como se ve, la distancia del plano de carga al plano oríjen, luego la carga se refiere siempre a cierto plano orijen i la ecuacion de Bernouilli espresa que la carga es constante en todos los puntos del líquido.

Es bien evidente que la ecuacion de Bernouilli no basta para definir el movimiento del líquido, pues ella contiene dos incógnitas p i v; sin embargo, en algunos casos, se conoce p, entonces v está determinado.

CAPÍTULO XVI

HIDRÁULICA

La hidráulica trata del movimiento de los líquidos i principalmente del agua en los depósitos, cañerías, canales, rios, etc. Se supone siempre el movimiento del líquido permanente, de suerte que las moléculas líquidas que pasan en un mismo punto tienen, en este punto, una misma velocidad.

Estudiaremos, en primer lugar, las propiedades jenerales del movimiento permanente de un líquido en un cauce cualquiera de forma invariable.

Gasto.

Supongamos que, en la masa líquida, se haga una seccion plana cualquiera que atraviesa completamente el cauce; busquemos el volúmen de líquido que atraviesa esta seccion durante el tiempo dt.

Sea $d\omega$ un elemento de área de la seccion *mojada* i v la velocidad de las moléculas líquidas que atraviesan $d\omega$, v_n la proyeccion de v sobre la normal al plano de la seccion; el volúmen de líquido que atraviesa el elemento $d\omega$ durante el tiempo dt es

$$d\omega \times v_n\, dt$$

luego, si ω es el área total de la seccion mojada, el volúmen de líquido que la atraviesa durante el mismo tiempo dt es

$$dt \int_{\omega} v_n\, d\omega$$

La integral definida, que multiplica dt, tiene un valor constante, puesto que el movimiento del líquido es permanente; sea Q este valor. Q representa el volúmen de líquido que atraviesa la seccion ω durante la unidad de tiempo; es lo que se llama el *gasto.*

El gasto Q es evidentemente el mismo en todas las secciones planas que atraviesan el cauce, puesto que el líquido es incompresible, luego el gasto es uno de los elementos que caracterizan el movimiento del líquido en el cauce considerado.

Si una seccion plana es atravesada normalmente por las moléculas líquidas i si las velocidades de las moléculas son iguales entre sí, la espresion del gasto toma una forma mui sencilla; sean, en efecto, ω el área de la seccion i v la velocidad de las moléculas que la atraviesan se tiene evidentemente

$$Q = \omega v$$

En otra seccion ω', análoga a ω, se tendria de la misma manera

$$Q' = \omega' v'$$

Luego

$$\omega' v' = \omega v$$

Es la regla de *Castelli*.

Pérdida de carga.

Consideremos, en el interior del cauce, un volúmen infinitamente pequeño dw de líquido. Dos casos pueden presentarse: 1.º el efecto de las paredes del cauce sobre el movimiento jeneral del líquido no alcanza a hacerse sentir sobre el elemento dw, entónces la ecuacion de Bernouilli se aplica sin modificacion al movimiento de este elemento; 2.º el efecto de las paredes alcanza a hacerse sentir sobre el elemento dw, sea directamente, sea por intermedio del líquido, entónces la enerjía cinética del elemento disminuirá, la ecuacion de Bernouilli, aplicada a dos posiciones consecutivas del elemento, deberá escribirse

$$z + \frac{p}{\Pi} + \frac{v^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{v_0^2}{2g} - P$$

El término correctivo P se llama *pérdida de carga*.

Supongamos que el cauce, en el cual se mueve el líquido, tenga dimensiones trasversales mui pequeñas respecto de la velocidad media del líquido; podemos, en este caso, considerar las dimensiones trasversales del cauce como infinitamente pequeñas respecto de la velocidad media, i limitar cada elemento dw del líquido por las paredes i dos secciones normales infinitamente próximas. Es bien evidente que en estos casos el movimiento de cada elemento es influenciado por la presencia de las paredes, luego habrá siempre una pérdida de carga. Si, entónces, se levanta en cada punto una recta vertical de lonjitud $\frac{p}{\Pi} + \frac{v^2}{2g}$ el lugar jeométrico de las estremidades de estas verticales no será un plano sino una línea *descendiente* en el sentido del movimiento del líquido; esta línea es la *línea de carga.* La diferencia de nivel entre dos de sus puntos representa entónces la pérdida de carga entre estos puntos.

De los piezómetros.

El piezómetro es un tubo de vidrio, de forma cualquiera, en comunicacion por una de sus estremidades M con un líquido i abierto a la otra estremidad. Sea p_a la presion atmosférica, p la presion del líquido en el punto M; el nivel del líquido en el piezómetro llegará encima del punto M, a una altura h tal que

$$h = \frac{p - p_a}{\Pi}$$

Es bien evidente que, si el piezómetro estuviera cerrado en la parte superior, el nivel del líquido llegaria a una altura igual a $\frac{p}{\Pi}$; pero estos piezómetros no se usan en la práctica. Se concibe tambien fácilmente cual forma se debe dar al piezómetro abierto cuando p es menor que p_a.

Si se colocara una sucesion de piezómetros verticales en las diferentes secciones de un cauce infinitamente delgado, los niveles del líquido dibujarian, en el límite, una curva: esta es jeneralmente distinta de la línea de carga, la llamaremos *línea piezométrica.*

Sea H la altura de uno de sus puntos encima del plano horizontal oríjen, se tiene

$$H = z + h = z + \frac{p - p_a}{\Pi}$$

Por otra parte sea C la carga en el mismo punto, se tiene

$$C = z + \frac{p}{\Pi} + \frac{v^2}{2g}$$

Luego

$$C = H + \frac{v^2}{2g} + \frac{p_a}{\Pi}$$

Esta fórmula muestra que la línea de carga i la línea piezométrica son paralelas cuando v es constante. Es necesario para ésto que la seccion del cauce tenga una área constante. Este es, por consiguiente el único caso en que se puede sustituir la línea de los niveles piezométricos a la línea de carga.

Determinacion directa de la pérdida de carga entre dos secciones en funcion de la diferencia correspondiente de los niveles piezométricos.

Sea η la diferencia de los niveles piezométricos en dos secciones cuyas áreas son ω_0 i ω, se tiene

$$\eta = H_0 - H = z_0 + \frac{p_0 - p_a}{\Pi} - \left(z + \frac{p - p_a}{\Pi} \right)$$

O bien

$$\eta = z_0 - z + \frac{p_0 - p}{\Pi}$$

Por otra parte

$$z + \frac{p}{\Pi} + \frac{v^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{v_0^2}{2g} - P$$

luego

$$(1) \qquad \eta = \frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} + P$$

Sea Q el gasto del tubo, se tiene

$$Q = \omega v = \omega_0 v_0$$

Luego

$$\eta = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \right) + P$$

O bien

$$P = \eta + \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

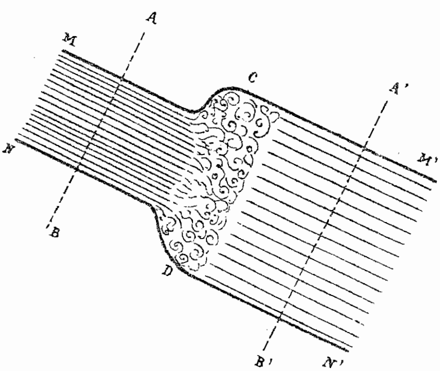
En el segundo miembro todos los términos son conocidos por la observacion, i la pérdida de carga P es espresada en funcion de la diferencia η de los niveles piezométricos, del gasto Q i de las secciones ω_0 i ω. Se averigua que $P=\eta$ cuando $\omega=\omega_0$.

La diferencia η se llama tambien *altura motriz* entre las secciones ω_0 i ω, en efecto la fórmula (1) muestra que, si no hubiera pérdida de carga, la altura motriz η seria precisamente igual a la diferencia de las alturas representativas de las velocidades.

Pérdida de carga debida a un ensanche brusco del tubo en el cual se mueve el líquido.

Sea (fig. 64) MM', NN' una seccion lonjitudinal del cauce; la observacion demuestra que, en la rejion CD, donde el cauce se ensancha brúscamente, el líquido forma remolinos i que, ántes i despues de esa rejion, las moléculas líquidas se mueven paralelamente con una velocidad sensiblemente constante.

Fig. 64.



Esto exije, como lo probaremos, que entre dos secciones AB i $A'B'$ situadas respectivamente ántes i despues de la rejion CD, haya una pérdida de carga.

En primer lugar, es preciso hacerse cuenta de dónde puede provenir esta pérdida de carga. Si se deja a un lado el rozamiento de las paredes entre las secciones AB i $A'B'$ la pérdida no puede provenir sino de una variacion en el valor de la cantidad c que figura en la espresion $(p+c)\,dw$ de la enerjía potencial de un elemento del líquido, i en efecto si el valor de c

no cambiara no podría haber lójicamente ninguna pérdida de carga, pero tampoco el líquido podria moverse como lo indica la observacion.

Consideremos dos puntos situados en los centros de gravedad de las secciones AB i $A'B'$, i sean z, p, v, i z', p', v', los elementos que definen la posicion, la presion i la velocidad del liquido en estos puntos.

Apliquemos el teorema de las proyecciones de las cantidades de movimiento a la porcion de líquido comprendido entre las secciones AB i $A'B'$; este teorema está espresado por la fórmula

$$(3) \qquad \frac{d \sum P_x^t\, mv}{dt} = \sum P_x^t\, F$$

Elijamos el eje OX en la direccion i sentido de las velocidades v i v'; como el movimiento es permanente, el aumento de la suma de las proyecciones de las cantidades de movimiento se reducirá a

$$\rho\, \omega'\, v' dt \times v' - \rho\, \omega\, v\, dt \times v = \rho\, \omega'\, v'\, dt\, (v' - v)$$

Luego

$$(4) \qquad \frac{d \sum P_x^t\, mv}{dt} = \rho\, \omega'\, v'\, (v' - v)$$

Las fuerzas esteriores son 1.º la pesantez que designaremos por Mg; 2.º las presiones en las secciones AB i $A'B'$; 3.º las presiones de las paredes.

Como en las rejiones AB i $A'B'$ el líquido está en equilibrio sólido respecto de un sistema de comparacion animado de una traslacion recta i uniforme, las presiones son equivalentes, como en hidrostática, al producto del área por la presion en el centro de gravedad, luego las proyecciones sobre OX serán

$$p\, \omega - p'\, \omega'$$

Las presiones de las paredes se limitan a las presiones en la rejion CD del ensanche, designaremos por $p'' d\omega''$ la presion del líquido sobre un elemento $d\omega''$ de la pared; la presion correspondiente del elemento de pared sobre el líquido será $-p''d\omega''$ i se tendrá

$$\Sigma P^t_x F = P^t_x Mg + p\omega - p'\omega' - \Sigma P^t_x p'' d\omega''$$

Consideramos ahora una masa del mismo líquido, en reposo entre las secciones $A\ B$ i $A'\ B'$, i designemos por las mismas letras, afectadas del índice r las presiones de este líqnido, tendremos evidentemente

$$0 = P^t_x Mg + p_r \omega - p_r{}' \omega' - \Sigma P_x p_r{}'' d\omega''$$

Luego se tiene tambien

$$\Sigma P^t_x F = (p - p_r)\omega - (p' - p_r{}')\omega' - \Sigma P^t_x (p'' - p_r{}'') dw$$

En la rejion de los remolinos se puede admitir que la velocidad de las moléculas líquidas es igual a v, es decir, a la velocidad en la rejion AB, luego en toda la rejion comprendida entre AB i los remolinos se puede considerar la diferencia $p - p_r$ como constante e igual a $p'' - p_r''$: se tiene entónces

$$\Sigma P^t_x (p'' - p_r{}'') d\omega = -(p - p_r)(\omega' - \omega)$$

Luego

$$(5) \qquad \Sigma P^t_x F = \left\{ p - p_r - (p' - p_r{}') \right\} \omega'$$

Llevemos los valores de (4) i (5) en la ecuacion (3) i tendremos

$$(6) \qquad \rho v'(v' - v) = p - p_r - (p' - p_r{}')$$

Ahora se tiene tambien

$$z' + \frac{p_r{}'}{\Pi} = z + \frac{p_r}{\Pi}$$

Luego

$$\frac{\rho\, v'(v'-v)}{\Pi} = \frac{p}{\Pi} - \frac{p'}{\Pi} + z - z'$$

O bien

$$z' + \frac{p'}{\Pi} - \left(z + \frac{p}{\Pi}\right) = \frac{v'(v-v')}{g}$$

O todavia

$$z' + \frac{p'}{\Pi} + \frac{v'^2}{2g} - \left(z + \frac{p}{\Pi} + \frac{v^2}{2g}\right) = \frac{v'(v-v')}{g} + \frac{v'^2 - v^2}{2g} = \frac{(v-v')^2}{2g}$$

Finalmente

$$z' + \frac{p'}{\Pi} + \frac{v'^2}{2g} = z + \frac{p}{\Pi} + \frac{v^2}{2g} - \frac{(v-v')^2}{2g}$$

Esta relacion demuestra, como se habia dicho mas arriba que, entre las secciones AB i $A'B'$, situadas ántes i depues del ensanche del tubo hai una pérdida de carga cuyo valor es

$$P = \frac{(v-v')^2}{2g}$$

Nota.—Observaremos que la espresion $\frac{(v-v')^2}{2g}$, multiplicada por el peso $\rho\, g\, dw$ de una molécula líquida de volúmen dw, da la enerjía cinética

$$\frac{1}{2}\, \rho\, dw\, (v-v')^2$$

de una molécula de la rejion AB respecto de un sistema de comparacion animado de la velocidad v'; esta enerjía cinética relativa desaparece efectivamente una vez que la molécula ha atravesado el ensanche.

A. OBRECHT

(Continuará)