CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

(Continuacion)

CAPÍTULO VIII

CONSIDERACIONES SOBRE LA TEORÍA JENERAL DE LAS FUNCIONES

Las propiedades jenerales de las funciones se deducen principalmente de su desarrollo por la fórmula de Taylor.

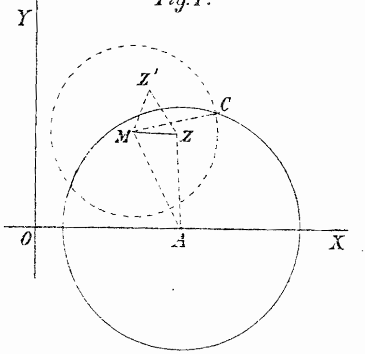
Hasta ahora hemos considerado una funcion que tenia valores reales para cierto grupo de valores reales de la variable i hemos establecido las reglas de converjencia de su desarrollo en serie.

El exámen del caso de las abcisas críticas imajinarias nos ha conducido en seguida a definir exactamente el valor de la funcion cuando la variable era imajinaria i representada por un punto situado en una rejion determinada del plano.

Los resultados obtenidos se pueden jeneralizar: Sea (fig. 7)

A un punto de abcisa real a; C un punto crítico de la funcion $f(X)$; M i Z dos puntos situados en el interior del círculo de converjencia de A; X i z los abcisas imajinarias de estos dos puntos.

Fig. 7.



Como el punto Z está situado en el interior del círculo de converjencia de A se tiene

$$(1) \quad f(z) = \Sigma \frac{(z-a)^{p}}{1.2\ldots p} f^{p}(a)$$

i la serie del segundo miembro es converjente.

Ahora

$$z - a = z - X + X - a$$

Sean m i n dos números enteros tales que $m+n=p$, se tendrá idénticamente

$$\frac{(z-a)^{p}}{1.2\ldots p} = \Sigma \frac{(z-X)^{n}}{1.2\ldots n} \frac{(X-a)^{m}}{1.2\ldots m}$$

Luego

$$(2) \quad f(z) = \Sigma\Sigma \frac{(z-X)^{n}}{1\,2\ldots n} \frac{(X-a)^{m}}{1.2,\ldots m} f^{m+n}(a)$$

Como el punto M está situado en el interior del círculo de converjencia de A se tiene

$$\Sigma \frac{(X-a)^{m}}{1.2\ldots m} f^{m+n}(a) = f^{n}(X)$$

Luego

$$(3) \quad f(z) = \Sigma \frac{(z-X)^{n}}{1.2\ldots n} f^{n}(X)$$

El segundo miembro es la serie de Taylor, ordenada segun las potencias de $z-X$, i su valor es igual a $f(z)$. Así el valor de $f(z)$ se puede deducir indiferentemente, sea del valor de la funcion i de sus derivadas en A, sea de los valores correspondientes en M.

Ademas la fórmula (1) permite escribir el valor de $f(z)$ bajo la forma $C+S\sqrt{-1}$. Sea $z-a=\rho' e^{i\phi'}$, se tiene

$$C=\Sigma\frac{\rho'^p}{1.2\ldots p}\cos p\phi' f^p(a)$$

$$S=\Sigma\frac{\rho'^p}{1.2\ldots p}\operatorname{sen} p\phi' f^p(a)$$

La fórmula (2) da tambien, si $z-X=re^{ia}$, $X-a=\rho e^{i\phi}$:

$$C=\Sigma\Sigma\frac{r^n}{1.2\ldots n}\frac{\rho^m}{1.2\ldots m}\cos(na+m\phi)f^{n+m}(a)$$

$$S=\Sigma\Sigma\frac{r^n}{1.2\ldots n}\frac{\rho^m}{1.2\ldots m}\operatorname{sen}(na+m\phi)f^{n+m}(a)$$

Bajo esta forma se ve bien claramente que si el punto M queda fijo, las condiciones de converjencia de la serie (3) dependen solo de r, es decir, del módulo de $z-X$; cuando el punto Z tiende a confundirse con el punto crítico C una de las series C, S o las dos, tienden hácia el infinito; la suma correspondiente de los módulos de las series trigonométricas tiende por consiguiente hácia el infinito. Luego la suma de los módulos queda finita solo para los valores de r menores que MC.

Segun esto, la serie (3) será converjente para todos los valores de z representados por los puntos del plano en el interior de un círculo de centro M i de radio MC; este círculo es el *círculo de converjencia en M de la funcion $f(X)$.*

Para todos los valores de z así definidos, la funcion $f(z)$ i sus derivadas sucesivas pueden ponerse bajo la forma $C+S\sqrt{-1}$, i las funciones C i S son series trigonométricas reales i converjentes.

La fórmula (3) puede todavía transformarse. Sea Z' un punto situado en el interior del círculo de converjencia de M i z' su abcisa imajinaria; se puede escribir, como mas arriba

$$z-X=z-z'+z'-X$$

Sean h i k dos números enteros tales que $h+k=n$, se tiene idénticamente

$$\frac{(z-X)^n}{1.2\ldots n}=\Sigma\frac{(z-z')^k}{1.2\ldots k}\,\frac{(z'-X)^h}{1.2\ldots h}$$

Luego, segun (3)

$$f(z)=\Sigma\Sigma\frac{(z-z')^k}{1.2\ldots k}\,\frac{(z'-X)^h}{1.2\ldots h}\,f^{k+h}(X)$$

Ahora, si $Z'Z$ es menor que $Z'C$ se tiene

$$\Sigma\frac{(z'-X)^h}{1.2\ldots h}\,f^{k+h}(X)=f^k(z')$$

Luego

(4) $$f(z)=\Sigma\frac{(z-z')^k}{1.2\ldots k}\,f^k(z')$$

Se obtiene otra vez la fórmula de Taylor ordenada ahora segun las potencias de $z-z'$, i la condicion para que la serie (4) sea converjente es que $Z'Z$ sea menor que $Z'C$, ademas, para que las series (3) i (4) den el mismo valor de $f(z)$ es necesario que MZ i MZ' sean mas pequeños que MC.

Consideremos ahora una funcion cualquiera $f(z)$, i sea $f(z_0)$ uno de sus valores correspondientes al valor z_0 de la variable. Sea (fig. 8) z_0 el punto representativo de la variable z_0 diremos que $f(z_0)$ es uno de los valores de la funcion en el punto z_0; en el mismo punto, las derivadas consecutivas de $f(z)$ que corresponden al valor adoptado en z_0 serán perfectamente determinadas. Se quiere calcular el valor correspondiente de la funcion en otro punto z.

Sea C el punto crítico de la funcion, mas próxima de z_0; no se podrá jeneralmente aplicar directamente el desarrollo de Taylor al cálculo de $f(z)$ en funcion del valor conocido en z_0, pues la distancia $z_0 z$ podrá ser mayor que $z_0 C$, pero se podrá considerar cierto número de puntos intermediarios entre z_0 i z i hacer el cálculo progresivamente, deduciendo el valor de la funcion en un punto cualquiera, del valor que se refiere al punto anterior.

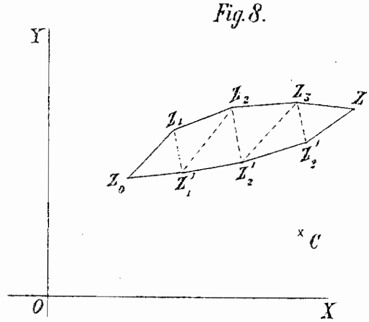


Fig. 8.

La condicion de converjencia de los desarrollos sucesivos exijirá solo que la distancia de cada vértice al siguiente sea menor que su distancia al punto crítico C.

Esta única condicion deja, como se ve, cierta arbitrariedad en la eleccion de los puntos intermediarios; busquemos la condicion a la cual deben satisfacer estos puntos para que el valor de la funcion en z, deducido de su valor en z_0 quede independiente de la disposicion de los puntos intermediarios en el plano.

Sean dos series de puntos intermediarios $z_1\, z_2\, z_3$ i $z_1'\, z_2'\, z_3'$, formemos con estos puntos i z, z_0 una serie de triángulos contíguos; el valor de la funcion en z_1' podrá deducirse del valor en z_0 sea directamente por el *camino* $z_0\, z_1'$ sea indirectamente por el camino $z_0\, z_1\, z_1'$ i el valor obtenido en z_1' quedará el mismo si $z_0\, z_1$, $z_0\, z_1'$ son menores que $z_0\, C$ i $z_1\, z_1'$ menor que $z_1\, C$. El mismo razonamiento aplicado a los puntos siguientes muestra fácilmente cuales son las condiciones para que los cálculos sucesivos hechos segun los caminos $z_0\; z_1\, z_2\, z_3\, z$ i $z_0\, z_1'\, z_2'\, z_3'\, z$ den finalmente el mismo valor de la funcion en z. Se ve claramente que se puede reemplazar progresivamente un camino por otro que se aproxime mas del punto crítico que el primero, i que se obtendrá siempre el mismo valor de la funcion en z si ninguno de los caminos sucesivos encuentra el punto crítico C.

En resúmen, dos caminos cualesquiera darán el mismo valor de la funcicn en z o serán equivalentes si el intervalo comprendido entre los dos no contiene el punto crítico C. En el caso jeneral de una funcion que tiene un número cualquiera de puntos críticos la condicion de equivalencia de dos caminos será evidentemente que el intervalo comprendido entre ellos no contenga ningun punto crítico de la funcion.

Si los puntos intermediarios entre z_0 i z son infinitamente próximos la condicion de converjencia de los desarrollos sucesivos es siempre satisfecha; un camino cualquiera es entónces representado por una curva i la sucesion de las operaciones que dan el valor de la funcion en z equivale a una integracion; sea en efecto la fórmula

$$F(X)=F(z)+\frac{X-z}{1}F'(z)+\frac{(X-z)^2}{1.2}F''(z)+\ldots$$

Se deduce de ella

$$(5)\qquad \frac{F(X)-F(z)}{X-z}=F'(z)+\frac{X-z}{1.2}F''(z)+\ldots$$

Sea γ la abcisa crítica, real o imajinaria de la funcion $F(z)$, el segundo miembro de (5) será perfectamente determinado si el módulo de $X-z$ es menor que el de $\gamma-z$, en este caso se podrá escribir

$$\frac{F(X)-F(z)}{X-z}=F'(z)+r(M+N\sqrt{-1})$$

r es el módulo de $X-z$ i M, N dos series trigonométricas reales i converjentes. Si X tiende hácia cero, $X-z$ tendrá tambien hácia cero i se tendrá

$$\lim\frac{F(X)-F(z)}{X-z}=F'(z)$$

O bien si se hace $X-z=dz$

$$\lim\frac{F(z+dz)-F(z)}{F'(z)\,dz}=1$$

Esto prueba que se puede reemplazar el incremento infinitamente pequeño de una funcion imajinaria por su diferencial, lo mismo como sucede en caso de las funciones reales de variables reales.

Sea por consiguiente $f(z)$ la derivada de una funcion $F(z)$; z_0 i z_1 dos valores de la variable se tendrá

$$F(z_1)=F(z_0)+\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$$

La integral definida será independiente del camino seguido por la variable para ir de z_0 en z_1 si, en el intervalo comprendido entre dos caminos cualesquiera no existe ningun punto crítico de la funcion.

Si la variable z describe una curva cerrada, es decir si parte de z_0 para volver en z_0 la integral definida será nula si ningun punto crítico de la funcion se encuentra en el interior de la curva considerada.

Tal es la base fundamental de la célebre teoría de *Cauchy*.

CLASIFICACION DE LAS FUNCIONES

Las funciones se dividen en dos clases principales: 1.° las que son contínuas en toda la extension del plano, 2.° las que tienen puntos críticos a distancia finita del oríjen.

Las derivadas i las integrales de las funciones de cada clase pertenecen a la clase correspondiente, puesto que tienen los mismos puntos críticos.

Entre estas funciones unas tienen un solo valor determinado para cada valor de la variable, son las funciones *uniformes;* otras pueden tener varios o una infinidad de valores para un mismo valor de la variable, son las funciones *multiformes.*

De las funciones de la primera clase

Las funciones de la primera clase son siempre uniformes. En efecto si se toma el valor de la funcion en un punto i si se calcula en seguida otro valor de la funcion en este mismo punto, despues de haber hecho describir a la variable una curva cerrada cualquiera, el segundo valor de la funcion es siempre igual al primero puesto que la integral definida relativa a la curva considerada, es siempre nula.

En la primera clase figuran los polinomios aljebraicos enteros i en jeneral, las funciones cuyo desarrollo por la fórmula de Taylor es siempre converjente; este desarrollo puede considerarse entónces como identicamente igual a la funcion; esta es pues un polinomio aljebraico de un número infinito de términos.

Funciones de la seguuda clase unifornes

Éstas son las funciones racionales de funciones de la primera clase. Sus derivadas son evidentemente bien definidas pero no sus integrales. Sin embargo, *cuando la integral de una funcion uniforme tiene valores distintos para un mismo valor de la variable, las diferencias entre estos valores distintos deben permanecer constantes para todos los valores de la variable.*

En efecto el incremento de la funcion integral correspondiente a un incremento cualquiera de la variable es independiente del valor inicial de esta funcion i depende solo de su derivada; como esta última tiene por hipótesis un solo valor para cada valor de la variable , se ve que las diferencias entre los valores iniciales de la funcion integral deben quedar independientes del valor de la variable.

De aquí se deduce que la suma de dos integrales definidos de una funcion uniforme relativas a una misma curva recorrida dos veces i en sentido contrario por la variable, es igual a cero, con la restriccion, sin embargo, que la curva considerada no encuentra ningun punto crítico en la parte recorrida por la variable.

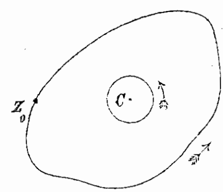
Integrales de las funciones uniformes.

Consideremos una curva cerrada cualquiera que contiene en el interior cierto número n de puntos críticos i busquemos la integral definida relativa a esta curva.

Dividimos la porcion del plano, limitada por la curva, en n rejiones, que contengan cada una un solo punto crítico; la integral definida será la suma de las n integrales definidas relativas a las n curvas cerradas que envuelven respectivamente las n puntos críticos; en efecto las curvas auxiliares que forman estas rejiones son recorridas cada una, dos veces i en sentido contrario por la variable i la suma de las integrales definidas correspondientes es igual a cero.

Esto supone naturalmente que la curva dada i las n curvas cerradas auxiliares son recorridas todas en un mismo sentido por la variable.

Fig. 9.



Consideremos (fig. 9) una de las curvas auxiliares, sea C el punto crítico único situado en el interior i K la integral definida correspondiente a la curva considerada.

Si la variable parte de un punto z_0 i describe una vez la curva, la funcion integral se habrá aumentado de K; de tal manera que K representa la diferencia de dos valores de la funcion integral en el mismo punto z_0. Se sabe que esta diferencia es constante e independiente de z_0 luego para obtener K se podrá substituir a la curva cerrada considerada, cualquiera otra curva cerrada que envuelva el punto C. Se elije jeneralmente una circunferencia de centro C i de radio arbitrario r, la integral definida relativa a esta circunferencia es entónces igual a K i debe ser naturalmente independiente de r, si la circunferencia no contiene en el interior otro punto crítico que C.

Funcion logarítmica

Esta funcion puede definirse como la integral de $\frac{1}{z}$, es decir la integral de una funcion uniforme. Su punto crítico es el oríjen i la integral relativa a una circunferencia de radio cualquiera r descrita al rededor de este punto es

$$K=\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\phi}\,id\phi}{re^{i\phi}}=\int_0^{2\pi}id\phi=2\pi i$$

Así, cada vez que la variable describe una curva que envuelve el oríjen, la funcion Lz se aumenta de $2\pi i$; la espresion jeneral de la funcion logaritmica es por consiguiente

$$Lz + 2n\pi i$$

En otros términos, la funcion logaritmica tiene en cada punto una infinidad de valores cuya diferencia constante es $2\pi i$. Segun esto, la funcion inversa e^z no debe cambiar cuando z aumenta de $2\pi i$. Este resultado se averigua fácilmente, en efecto

$$e^{z+2\pi i} = e^z \; e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^z$$

Funcion arco tanjente

Se tiene

$$arc\ tg\ z = \int \frac{dz}{1+z^2}$$

Esta funcion tiene dos puntos críticos $z = \pm i$. Consideremos una circunferencia de centro $+i$ i de radío menor que 2 la integral definida al rededor de esta circunferencia será

$$K = \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\phi}}{2ire^{i\phi} + r^2 e^{2i\phi}} id\phi = \int_0^{2\pi} \frac{id\phi}{2i + re^{i\phi}}$$

El valor de K debe ser independiente de r, si r es menor que 2; podemos, por consiguiente, hacer r igual a cero, entónces

$$K = \int_0^{2\pi} \frac{id\phi}{2i} = \pi$$

Si se buscara el valor de la integral definida K', correspondiente a la circunferencia de centro $-i$ se obtendria de la misma manera

$$K' = -\pi$$

Así la funcion *arc tg z* tiene en cada punto una infinidad de valores cuya diferencia constante es π; la funcion inversa *tg z* tiene pues un período igual a π.

Integral de una fraccion racional

Una fraccion racional puede descomponerse en una suma de fracciones simples; sea

$$\frac{A}{(z-\gamma)^n}$$

una de ellas; n es un número entero i positivo, A i γ dos constantes, reales o imajinarias.

La fraccion racional tiene un número de puntos críticos igual al número de raices distintas de su denominador; consideremos una curva cerrada que encierre un número cualquiera de estos puntos, la integral definida relativa a esta curva será la suma de las integrales relativas a las circunferencias descritas al rededor de los puntos críticos. Sea por ejemplo la circunferencia

$$z=\gamma+re^{i\phi}$$

Si se reemplaza la fraccion racional por la suma de las fracciones simples correspondientes, las únicas fracciones simples que darán una integral definida diferente de cero serán las que tienen $z-\gamma$ en denominador.

Por otra parte la integral

$$\int_0^{2\pi}\frac{Are^{i\phi}}{r^n e^{ni\phi}}\,id\phi$$

es idénticamente nula si n es mayor que uno e igual a $2\pi iA$ si $n=1$; luego la integral definida relativa a la circunferencia de centro γ es igual a $2\pi iA$.

Cuando la raiz γ es real, A es real i la integral definida correspondiente imajinaria; cuando la raíz γ es imajinaria A tiene la forma $M+Ni$, luego

$$2\pi iA=2\pi\,(iM-N)$$

En resúmen la funcion integral de una fraccion racional tiene en cada punto una infinidad de valores i la diferencia constante entre ellos es de la forma $2\pi(iM-N)$.

DE LAS FUNCIONES MULTIFORMES

Estas funciones pueden tomar varios o una infinidad de valores diferentes para un mismo valor de la variable; sin embargo cuando se adopta, en un punto, uno de estos valores, se puede calcular el valor correspondiente en otro punto por medio de una integral definida a la condicion de definir cual es el camino que recorre la variable para ir de uno a otro punto.

Consideremos, por ejemplo, la funcion Lz; ya hemos visto que esta funcion tiene, en cada punto, una infinidad de valores; entre estos valores se puede elejir uno determinado en un punto dado; así, cuando a es real i positivo, uno de los valores de la funcion es real, sea $L\,a$ este valor, para otro valor de z, se tendrá

$$Lz=La+\int_a^z \frac{dz}{z}$$

Cuando el camino recorrido por la variable, para ir de a a z, es determinado, la integral definida tiene un solo valor, hagamos describir a la variable un arco de circunferencia de radio a i cuyo centro es el oríjen; sea ϕ el ángulo al centro, correspondiente a este arco, tendremos

$$z=a\,e^{i\phi}$$

$$L\,z=L\,a+\int_0^\phi id\phi=L\,a+i\,\phi$$

El valor de $L\,z$ es así bien determinado; si $\phi=\pi$ por ejemplo se tiene

$$L\,(-a)=L\,a+i\pi$$

Cuando la variable vuelve al mismo punto despues de haber recorrido la circunferencia entera se vuelve a encontrar la diferencia $2i\pi$ entre los dos valores de la funcion.

Consideremos ahora la funcion z^m. Cuando z tiene un valor a, real i positivo, uno de los valores de la funcion es real, sea a^m este valor; para un valor cualquiera de z se tendrá

$$z^m = a^m + \int_a^z m z^{m-1} dz$$

Hagamos describir a la variable el mismo arco de circunferencia definido mas arriba, tendremos

$$z = a e^{i\phi}$$

$$z^m = a^m + \int_0^\phi m i a^m e^{mi\phi} d\phi = a^m e^{mi\phi}$$

El valor de z^m es así bien determinado; si la variable describe circunferencias enteras i vuelve por consiguiente al punto de partida se tiene

$$z^m = a^m e^{2nmi\phi}$$

Se ve que la funcion z^m tiene: 1.º un solo valor cuando m es entero, positivo o negativo; 2.º un número finito de valores cuando m es fraccionario; 3.º un número infinito de valores cuando m es inconmensurable.

Cuando m es fraccionario o inconmensurable, la derivada de z^m es una funcion multiforme i se ve que los valores distintos que puede entónces tomar la funcion, para un mismo valor de la variable, no tienen diferencias constantes como en caso de Lz.

FÓRMULA IMPORTANTE

Sea $f(z)$ una funcion cualquiera de z, i

$$F(z) = \int \frac{f(z)\,dz}{(z-\gamma)^{n-1}}$$

n es un número entero i γ una cantidad real o imajinaria; supondremos que los puntos críticos de $f(z)$ son diferentes de γ i que R es la distancia de γ al punto crítico de $f(z)$ mas próximo de γ. La funcion $f(z)$ puede desarrollarse en série ordenada segun las potencias de $z-\gamma$ a condicion que el módulo de $z-\gamma$ sea menor que R, entónces

$$F(z)=\Sigma\frac{f^p(\gamma)}{1.2\ldots p}\int\frac{dz}{(z-\gamma)^{n+1-p}}$$

Hagamos describir a la variable z una circunferencia de centro γ i de radio arbitrario r menor que R; la integral definida será

$$\int_0^{2\pi}\frac{f(\gamma+re^{i\phi})}{r^n e^{ni\phi}}id\phi=\Sigma\frac{f^p(\gamma)}{1.2\ldots p}\int_0^{2\pi}\frac{id\phi}{r^{n-p}e^{(n-p)i\phi}}$$

En el segundo miembro las integrales definidas son idénticamente iguales a cero si $n-p$ es diferente de cero, i cuando $n-p=0$, se tiene

$$\int_0^{2\pi}id\phi=2\pi i$$

Luego

$$\frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi}\frac{f(\gamma+re^{i\phi})}{e^{ni\phi}}d\phi=2\pi\frac{f^n(\gamma)}{1.2\ldots n} \qquad (6)$$

Supongamos, en primer lugar, que la funcion f no tenga ningun punto crítico a distancia finita del oríjen, la fórmula (6) será exacta cualesquiera que sean γ i r; si r tiende hácia el infinito la integral definida que figura en el primer miembro deberá tender hácia el infinito, pues si estuviera finita su producto por $\frac{1}{r^n}$ seria nulo. En este último caso las derivadas de $f(z)$ serian nulas i la funcion considerada seria constante. Así la funcion $f(\gamma+re^{i\phi})$ debe tender hácia el infinito para cierto valor de ϕ, cuando r tiende hácia el infinito. En resúmen, una funcion $f(z)$ que no tiene puntos críticos a distancia finita del oríjen tiene forzosamente un punto crítico en el infinito, es decir se hace infinita para cierto valor de la variable de módulo infinito.

Recíprocamente, una funcion qne no es infinita para ningun valor de la variable de módulo infinito tiene, por lo ménos, un punto crítico a distancia finita del oríjen. En efecto si no tuviera tal punto, la funcion se haria infinita para cierto valor de la variable de módulo infinito.

Segun esto, *una ecuacion*

$$f(z)=0$$

cuyo primer miembro es un polinomio aljebraico ent..o tiene, por lo ménos, una raíz de modulo finito; en efecto la funçion $\frac{1}{f(z)}$ es igual a cero cuando z tiene un valor cualquiera de módulo infinito, luego esta funcion tiene un punto crítico a distancia finita del oríjen; i una de sus derivadas se hace infinita para cierto valor finito, real o imajinario de z; como las derivadas de $\frac{1}{f(z)}$ se hacen infinitas al mismo tiempo que $\frac{1}{f(z)}$ se ve que habrá cierto valor de z, de módulo finito, para el cual $f(z)$ será igual a cero. Lo que demuestra la proposicion.

Aplicacion del método de Cauchy a la determinacion de algunas integrales definidas

I.—Sea la integral

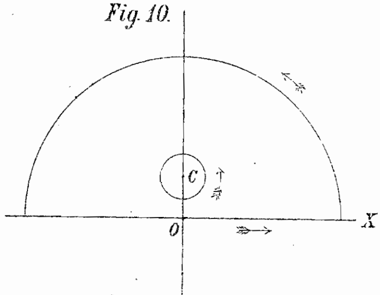
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos a x}{b^2+x^2} dx$$

Consideremos la funcion mas jeneral

$$F(z)=\int \frac{e^{a z i}}{b^2+z^2} dz$$

ésta tiene dos puntos críticos $z=\pm b\, i$; la funcion $\frac{e^{a z i}}{b^2+z^2}$ es bien definida, luego la integral definida relativa a una curva cerrada cualquiera que envuelva uno de los puntos críticos es igual a la integral definida relativa a una circunferencia descrita al rededor de este punto. Calculemos esta última, haremos

Fig. 10.



$$z=bi+re^{i\phi}$$

sea K el valor buscado, tendremos

$$K=\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{ai\left(bi+re^{i\phi}\right)}}{2bi+re^{i\phi}}\,i\,d\phi$$

Este valor de K debe ser independiente de r, luego podemos hacer $r=0$ i se tiene

$$K=\frac{e^{-ab}}{2b}\int_{0}^{2\pi}d\phi=\frac{\pi}{b}e^{-ab}$$

Sea ahora la curva de integracion formada (fig. 10) por una parte del eje OX, entre las abcisas $-R$ i $+R$, i una média circunferencia de centro O, tendremos

$$K=\int_{-R}^{+R}\frac{e^{axi}}{b^2+x^2}\,dx+\int_{0}^{\pi}\frac{e^{aiRe^{i\phi}}}{b^2+R^2e^{2i\phi}}\,Re^{i\phi}\,id\phi$$

Por otra parte

$$e^{aiRe^{i\phi}}=e^{aiR\cos\phi-aR\,\mathrm{sen}\,\phi}=$$

$$e^{-aR\,\mathrm{sen}\,\phi}\left[\cos\left(aR\cos\phi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(aR\,\mathrm{sen}\,\phi\right)\right]$$

Si a es positivo, el esponente de e es negativo, pues sen ϕ es siempre positivo; cuando R tiende hácia el infinito, $e^{aR \text{ sen } \phi}$ tiende hácia cero i el término que multiplica esta esponencial queda finito; se ve entónces que la integral definida relativa a la média circunferencia es nula cuando R es infinito; se tiene por consiguiente

$$K=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{axi}}{b^2+x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}\,dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{sen } ax}{b^2+x^2}\,dx$$

Finalmente, si se reemplaza K por su valor

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{b}\,e^{-ab}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{sen } ax}{b^2+x^2}\,dx=0$$

Esta última integral era evidentemente nula.

Si a fuera negativa, se consideraría una curva de integracion simétrica de la primera respecto a $O\,X$, sea entónces $a=-a'$ se obtendria

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos a'x}{b^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{b}\,e^{-a'b}$$

Si a es igual a cero, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{b^2+x^2}=\frac{\pi}{b}$$

II.—Sea la integral

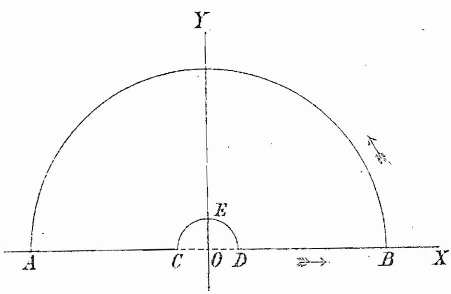
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{sen } ax}{x}\,dx$$

Para calcularla, se considera la funcion mas jeneral

$$F(z)=\int \frac{e^{azi}}{z}\, dz$$

Esta tiene por punto crítico el oríjen. Sea (fig. 11) una curva de integracion, compuesta de dos média circunferencias, de centro O i de radios r i R i de las dos porciones AC i DB del diámetro comun dirijido segun OX; la integral definida correspondiente a esta curva será nula.

Fig. 11.



Si a es positivo, se averigua, como en el caso anterior, que la integral tomada segun la média circunferencia de radio R tiende hácia cero cuando R tiende hácia el infinito, tendremos, por consiguiente

$$\int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{axi}}{x}\, dx - \int_{0}^{\pi} e^{aire^{i\phi}}\, i\, d\phi + \int_{+r}^{+\infty} \frac{e^{axi}}{x}\, dx = 0$$

La integral relativa a la media circunferencia de radio r debe ser independiente de r luego su valor es $-i\pi$ i se tiene

$$\int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{axi}}{x}\, dx + \int_{+r}^{+\infty} \frac{e^{axi}}{x}\, dx = i\pi$$

O bien

$$\int_{-\infty}^{-r} \frac{\cos ax}{x}\, dx + \int_{+r}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x}\, dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{-r} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx + \int_{+r}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx = \pi$$

Este último resultado es exacto cualquiera que sea r, por otra parte la integral

$$\int_{-r}^{+r} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx$$

tiende hácia cero cuando r tiende hácia cero, luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx = \pi$$

ALBERTO OBRECHT

(Continuará.)