CURSO DE CALCULO INFINITESIMAL

O ANÁLISIS TRASCENDENTAL

(Continuacion)

35.—Curvas paralelas.

Si en cada punto de una curva AB se traza una normal de lonjitud constante, se obtiene una curva CD paralela a la primera. En efecto, en este caso, la recta MM' tiene una lonjitud constante: ($dl=0$) i el ángulo ϕ que hace con la tanjente en M es igual a 90° ($\cos\phi=0$).

Se obtiene por consiguiente segun (2)

$$ds' \cos\phi' = 0$$

O bien

$$\phi' = 90^\circ$$

Recíprocamente, si una recta se mueve de tal manera que en sus dos estremidades, esté normal a dos curvas, su lonjitud es constante. En efecto se tiene, en este caso: $\phi=90^\circ$, $\phi'=90^\circ$ luego

$$dl = o$$

O bien:

$$l = \text{constante}$$

Desarrollante.

Se demuestra fácilmente la propiedad indicada mas arriba.

En efecto, sea A el oríjen desde el cual se cuentan los arcos sobre la curva AB; la definicion de la desarrollante conduce a la ecuacion

$$l + s = \text{const.}$$

Luego

$$dl + ds = 0$$

Ademas el ángulo ϕ es aquí igual a $0°$, luego la fórmula (2) da

$$dl = ds' \cos\phi' - ds$$

O bien

$$ds' \cos\phi' = dl + ds = 0$$

Se ve que $ds' \cos\phi'$ es siempre nulo, luego ϕ' debe ser igual siempre a $90°$.

Recíprocamente, si una recta como NM queda siempre normal a una curva CD i tanjente a otra AB, se tiene

$$l + s = \text{const.}$$

siendo s un arco contado sobre la curva AB; en efecto, se tiene por hipótesis: $\phi' = 90°$, $\phi = 0°$ se obtiene, entónces, segun (2)

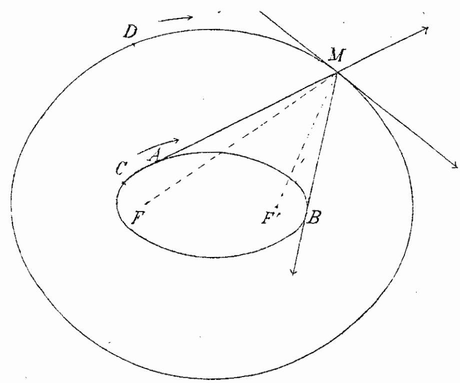
$$dl = -ds$$

O bien

$$l + s = \text{const.}$$

Se notará que no hai necesidad de suponer la curva plana para demostrar estas propiedades.

37. Teorema de Chasles.—*Sean dos elipses homofocales; por un punto M de la elipse esterior se trazan dos tanjentes MA, MB a la otra: la suma $AM+MB+$*arco *AB queda constante, cuando M describe la elipse esterior.*



Apliquemos la fórmula (2) a cada una de las rectas MA, MB. Se contarán los arcos en las dos elipses desde los puntos fijos i arbitrarios C i D en un mismo sentido indicado por las flechas de la figura; sea entónces: $AM=l$, $MB=l'$; MT la tanjente en M a la elipse esterior, ϕ i ϕ' los ángulos que hace esta tanjente con AM i MB; s el arco CA; σ el arco CAB; s' el arco DM, tendremos

$$(3) \qquad \begin{cases} dl=ds-ds'\cos\phi \\ dl'=ds'\cos\phi'-d\sigma \end{cases}$$

Se demuestra en jeometría que $\phi=\phi'$ cuando las dos elipses son homofocales, luego si se suman las dos ecuaciones (3) se tendrá

$$dl+dl'=ds-d\sigma$$

O bien

$$l+l'+\sigma-s=\text{const.}$$

Es decir

$$AM+MB+\text{arco } AB=\text{const.}$$

DE LAS ENVOLVENTES

38. Sea la ecuacion.

$$F(x, y, C) = 0 \tag{4}$$

en la cual C es una constante arbitraria; esta ecuacion representa una familia de curvas; pues a cada valor de C corresponde una curva; se llama *envolvente* de esta familia de curvas el límite hácia el cual tiende el lugar jeométrico de los puntos de interseccion sucesivos de cada curva con la curva infinitamente próxima.

Esta curva envolvente será tanjente a cada una de las curvas (4); en efecto, el lugar jeométrico, definido mas arriba, tiene dos puntos infinitamente próximos comunes con cada una de las curvas (4), luego en el límite será tanjente a cada una de estas curvas.

Ecuacion de la envolvente.—Se consideran, en primer lugar, dos curvas que corresponden a los valores C i $C+dC$ de la constante arbitraria; el punto de encuentro de estas curvas satisfará a las dos ecuaciones siguientes

$$F(x, y, C) = 0$$
$$F(x, y, C+dC) = 0$$

Podrán haber varios puntos de encuentro, pero serán siempre en número finito. Para encontrar las soluciones comunes a estas dos ecuaciones se puede reemplazar una de ellas por cierta combinacion de las dos; así, en vez de la segunda ecuacion, se puede considerar la siguiente

$$F(x, y, C+dC) - F(x. y, C) = 0$$

El primer miembro es el incremento de la funcion $F(x, y, C)$ cuando C se cambia en $C+dC$. Sea ϵ un infinitamente pequeño que tiende hácia cero al mismo tiempo que dC, se podrá escribir

$$F(x, y, C+dC) - F(x. y, C) = dC\left(\frac{dF}{dC} + \epsilon\right)$$

Así la segunda ecuacion se puede reemplazar por esta

$$dC\left(\frac{dF}{dC}+\epsilon\right)=0$$

O simplemente

$$\frac{dF}{dC}+\epsilon=0$$

pues dC no es nulo. Como ϵ tiende hácia cero, cuando dC tiende hácia cero, se ve que el punto de interseccion de las dos curvas C i $C+dC$ tiende hácia cierto límite que será a la interseccion de las dos curvas

$$F(x,y,C)=0$$

$$\frac{dF}{dC}=0$$

La envolvente resultará, segun esto, de la eliminacion de C entre estas dos últimas ecuaciones.

1.ª **Aplicacion.**—Una recta de lonjitud constante se mueve de tal manera que sus dos estremidades encuentran siempre dos ejes de coordenadas rectangulares. Determinar su envolvente.

Sea l la lonjitud de la recta, su ecuacion se podrá escribir

$$\frac{x}{C}+\frac{y}{\sqrt{l^2-C^2}}=1$$

La derivada parcial respecto a C es

$$-\frac{x}{C^2}+\frac{Cy}{(l^2-C^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

O bien

$$\frac{C^3}{x}=\frac{(l^2-C^2)^{\frac{3}{2}}}{y}$$

Estrayendo la raiz $\frac{2}{3}$

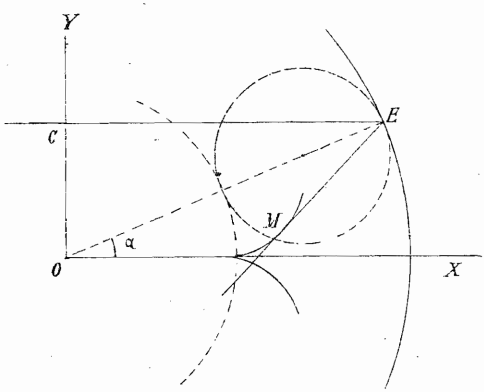
$$\frac{C^2}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{l^2-C^2}{y^{\frac{2}{3}}}=\frac{l^2}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$$

Sustituyendo en la ecuacion de la recta, tenemos

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$$

2.ª Aplicacion.—Cáustica por reflexion.

Sea AB una seccion meridiana de un espejo esférico; en el plano XOY de esta seccion se consideran radios de luz de direccion paralela a OX i se pide la envolvente de los radios reflejados por el espejo. Es esta envolvente que se llama cáustica por reflexion.



Sea CE un radio de luz paralelo a OX; si O es el centro del espejo i E el punto de encuentro de CE con el espejo, el radio reflejado se obtendrá, juntando E con O i trazando una recta EM que hace con EO un ángulo igual a CEO.

Sea α el ángulo EOX, se tiene

$$CEO=OEM=\alpha$$

I la ecuacion de la recta EM será

$$y\cos 2\alpha-x\operatorname{sen} 2\alpha+r\operatorname{sen}\alpha=0 \tag{5}$$

Cuando α se considera como una constante arbitraria, la ecuacion (5) representa una familia de rectas i su envolvente tendrá por ecuacion la que resultará de la eliminacion de α entre esta ecuacion i su derivada parcial respecto a α. Esta derivada es

$$-2y\operatorname{sen} 2\alpha-2x\cos 2\alpha+r\cos\alpha=0 \tag{6}$$

Las dos ecuaciones (5) i (6) se pueden reemplazar por las siguientes

$$x=\frac{r}{2}(2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 2\alpha+\cos \alpha \cos 2\alpha)$$

$$y=\frac{r}{2}(\cos \alpha \operatorname{sen} 2\alpha-2 \operatorname{sen} \alpha \cos 2\alpha)$$

O bien

$$(7) \qquad \begin{cases} x=\dfrac{3r}{4}\cos \alpha-\dfrac{r}{4}\cos 3\alpha \\ y=\dfrac{3r}{4}\operatorname{sen} \alpha-\dfrac{r}{4}\operatorname{sen} 3\alpha \end{cases}$$

Bajo esta forma i sin proceder a la eliminacion de α se ve que las dos ecuaciones (7) representan una epicicloide enjendrada por un punto de una circunferencia de radio $\frac{r}{4}$ que rueda sobre otra fija de radio $\frac{r}{2}$

CAPÍTULO VIII

EVALUACION DE LAS ÁREAS PLANAS

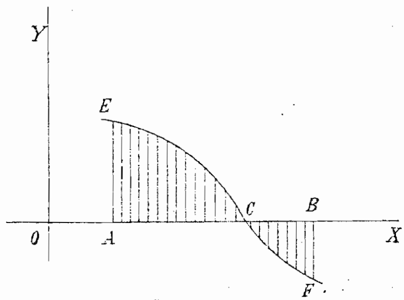
Se ha visto mas arriba que, cuando una curva es referida a coordenadas rectangulares i tiene una ecuacion como

$$y=f(x)$$

el área A comprendido entre la curva, el eje de las X i dos ordenadas correspondientes a los abcisos a i b tiene por espresion:

$$(1) \qquad A=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b y\,dx$$

Si, entre las abcisas a i b, la curva atraviesa el eje OX como en la fijura, la fórmula (1) dará la diferencia de las áreas correspondientes a las partes situadas arriba i abajo del eje OX; en efecto en la parte CBF por ejemplo las ordenadas de los puntos de la curva CF son todas negativas luego la suma de los elementos $y\,dx$ será tambien negativa en esta parte.

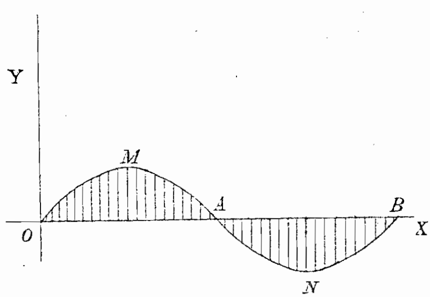


Ejemplo.

Área comprendida entre la curva

$$y = a \operatorname{sen} \frac{x}{b}$$

el eje OX i las abcisas cero i $OA = \pi\, b$. La figura muestra que se trata de obtener el área OMA; sea A el área buscado se tendrá



$$A = a \int_0^{\pi b} \operatorname{sen} \frac{x}{b}\, dx$$

Para hacer la integracion se tomará una nueva variable α tal que

$$\frac{x}{b} = \alpha$$

I se tendrá

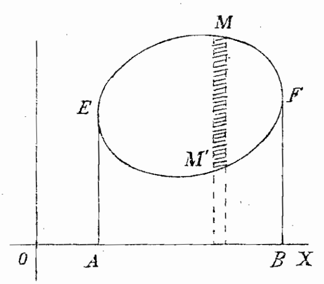
$$A = a\, b \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \alpha\, d\alpha = 2\, ab$$

Si se quisiera obtener el área comprendido entre las abcisas cero i $OB = 2\,\pi\, b$, la fórmula daria como resultado cero, pues se obtiene así la diferencia de las áreas OMA, ANB que son iguales entre sí.

En jeneral se debe recomendar siempre la construccion gráfica de la curva ántes de hacer la integracion; se evita así todo error en la interpretacion del resultado.

Área comprendida en el interior de una curva cerrada.

Si el área considerado tiene la forma indicada en la figura, una ordenada cortará el contorno en dos puntos M i M'; sean y, y' las ordenadas de estos dos puntos; EA, FB dos tanjentes a la curva paralelas al eje OY, el área buscado tendrá por valor



$$\int_{OA}^{OB}(y-y')dx$$

En muchos casos la curva cerrada que se considera tiene por eje de simetría el eje OX, basta entónces calcular el área de la parte situada encima de OX i duplicarla para obtener el área total.

Ejemplos:

Área del cí·culo.

Si se toma el oríjen de las coordenadas en el centro del círculo su ecuacion será

$$x^2+y^2=R^2$$

El área del semi-círculo situado encima del eje OX es entónces

$$\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-x^2}\ dx$$

I el área total que llamaremos A, será

$$A=2\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-x^2}\ dx$$

Para hacer esta integracion basta poner

$$x = R \cos \phi$$

Se tiene entónces

$$A = 2\int_0^{\pi} R^2 \sin^2 \phi \, d\phi = \pi R^2$$

Si el centro es en un punto cualquiera del plano, se aplicará el procedimiento indicado mas arriba. La ecuacion de la curva es entónces

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Luego

$$y = b \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$$

La diferencia $y - y'$ es en este caso

$$y - y' = 2 \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$$

Luego

$$A = \int_{a-R}^{a+R} 2\sqrt{R^2 - (x-a)^2} \, dx$$

Se hace todavía

$$x - a = R \cos \phi$$

I se obtiene

$$A = 2 R^2 \int_0^{\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = \pi R^2$$

Area de la elipse.

Se toma la ecuacion de la curva bajo la forma

$$x = a \cos \phi$$

$$y = b \operatorname{sen} \phi$$

Sea A el área buscado se tendrá, si se nota que la curva es simétrica respecto a OX

$$A=2\int_{-a}^{+a} y\,dx=2\,ab\int_{0}^{\pi} \sin^2 \phi\, d\,\phi=\pi\, ab$$

Área de la cicloide.

Las ecuaciones que definen esta curva son

$$x=r\,(u-\text{sen}\,u)$$

$$y=r\,(1-\cos u)$$

Se tiene

$$y\,dx=r^2\,(1-\cos u)^2\,du$$

Luego, si se busca el área A que corresponde a una vuelta entera del círculo jenerador, se tendrá

$$A=r^2\int_{0}^{2\,\pi}(1-\cos u)^2\,du=3\,\pi\,r^2$$

Áreas de las curvas espresadas en coordenadas polares.

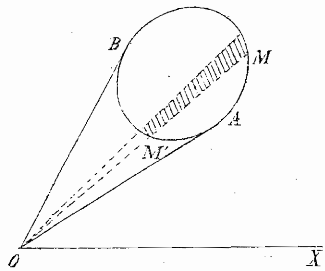
Se descompone el área en una suma de sectores infinitamente pequeños teniendo cada uno un ángulo al centro igual a $d\theta$. Sean r i $r+dr$ los radios de uno de estos sectores, su área se podrá reemplazar por el de un sector circular de radio r i de mismo ángulo $d\theta$, pues se desprecia así una cantidad de órden superior respecto a $d\theta$, luego sea

$$r=f\,(\theta)$$

la ecuacion de la curva i θ_1, θ_2 los ángulos que limitan la porcion de área que se quiere evaluar; A esta área se tiene

$$A=\tfrac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta$$

Si se trata de una curva cerrada como en la figura siguiente, se llaman r i r' los radios vectores que corresponden a los dos puntos de interseccion de un radio OM con la curva, se trazan las dos tanjentes OA, OB i se escribe



$$A=\frac{1}{2}\int_{AOX}^{BOX}(r^2-r'^2)\,d\theta$$

Ejemplo.

Área del círculo

Su ecuacion es

$$r=R$$

Luego

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}R^2 d\theta=\pi R^2$$

Área de la cardioïde.

Su ecuacion es

$$r=R\,(1+\cos\theta)$$

Luego

$$A=\frac{1}{2}R^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta=\frac{3\,\pi\,R^2}{2}$$

Área del ***folium de Descartes.***

Su ecuacion es

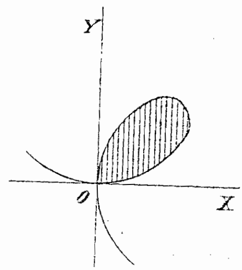
$$x^3-3\,a\,x\,y+y^3=0$$

O, en coordenadas polares

$$r=\frac{3a\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta}$$

Si se llama A el área de la parte comprendida entre los ejes OX i OY, se tiene

$$A = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta)^2}d\theta$$



Para hacer la integracion, se hace

$$tg\,\theta = z$$

Luego

$$A = \frac{9\,a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{z^2\,dz}{(1+z^3)^2}$$

Se hará todavía

$$1+z^3 = u$$

Luego

$$A = \int_1^{\infty}\frac{du}{u^2} = \frac{3\,a^2}{2}$$

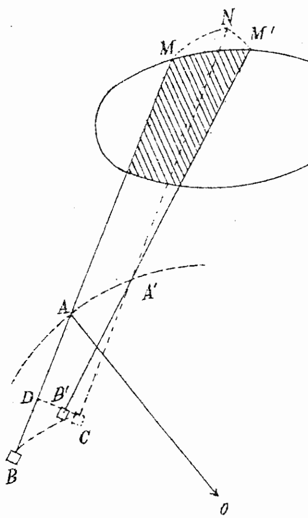
Áreas planas cualesquiera; su evaluacion por medio del planímetro de Amsler

El planímetro de Amsler es un instrumento que permite evaluar el área comprendido en el interior de una curva cerrada de forma cualquiera.

Se compone de dos brazos ríjidos OA, AM articulados en A. En el punto O se halla una punta de acero que permite fijar este punto en el plano de la figura; en M se encuentra un estilo con el cual se sigue el contorno de la curva; por fin en un punto cualquiera del brazo AM o sobre su prolongacion se encuentra colocada una rueda B que tiene por eje AM, esta rueda descanza sobre el plano de la figura.

Para obtener el área contenido en una curva cerrada se sigue su contorno con el estilo M en un sentido determinado, de izquierda a derecha por ejemplo; cuando el estilo describe el contorno entero en el sentido fijado, la rueda B describe cierto arco α i el área contenido en la curva tiene por medida el producto de α por la lonjitud del brazo AM.

Para demostrar esta propiedad se supone en primer lugar, la curva cerrada de forma convexa; se nota entónces que siempre se puede elejir el punto fijo O de tal manera que el ángulo MAO no llegue a ser igual a 180°, cuando el estilo recorre la curva (es evidente que, si el área considerado fuera demasiado grande, se podria siempre subdividir en otros mas pequeños i evaluar separadamente cada uno de estos últimos.)



Ahora, si se considera un punta cualquiera del plano en el interior de la curva considerada, se ve que el brazo AM no encontrará este punto sino una sola vez; miéntras tanto un punto de la rejion recorrida por el brazo AM i esterior a la curva será encontrado dos veces por este brazo, una vez en un sentido i otra vez en sentido contrario. Si se da a las áreas descritas por el brazo AM un signo determinado en relacion con el sentido del movimiento del brazo (por ejemplo, positivas cuando el brazo los describe de izquierda a derecha i negativas en el caso contrario), se ve que la suma aljebraica de las áreas elementales descritas por el brazo AM cuando el estilo M recorre toda la curva es igual precisamente al área contenido en la curva.

Tratemos ahora de evaluar esta suma aljebráica.

Sean AM i $A'M'$ dos posiciones infinitamente próximas del brazo; el área infinitamente pequeño $AMA'M'$ debe ser considerado aquí positivo, segun las convenciones admitidas. Para evaluar esta área trazemos $A'N$ paralelo a AM i el arco NM' con el radio $A'M'$; sea NM un arco paralelo a AA'; si se desprecian los infinitamente pequeños de órden superior se podrá reemplazar el área $AMA'M'$ por la suma

$$AA'NM+NA'M'$$

Sea l la lonjitud AM, h la distancia infinitamente pequeña de las dos paralelas AM, $A'N$ i ϵ el ángulo $NA'M'$ se podrá escribir, al mismo órden de aproximacion

$$AMA'M'=lh+\tfrac{1}{2}l^2\,\epsilon$$

Luego el área total contenida en la curva será

$$A=l\,\Sigma h+\tfrac{1}{2}\,l^2\,\Sigma\epsilon$$

Como de los dos brazos OA i AM no llegan nunca a formar un ángulo de 180° se se ve que

$$\Sigma\,\epsilon=o$$

Luego

$$A=l\Sigma\,h$$

La espresion $\Sigma\,h$ se puede obtener en funcion del arco que describe la rueda B; en efecto sean B i B' las dos posiciones de la rueda correspondientes a las posiciones AM, $A'M'$ del brazo AM; sea tambien C un punto de la paralela $A'N$ a una distancia $A'C=A'B'$ i CD una perpendicular bajada de C sobre AB; es visible que la rueda B llegará a su posicion B' por medio de los movimientos sucesivos BD, DC, DB'; durante el movimiento BD la rueda no jirará al rededor de su eje; durante el movimiento DC la circunferencia de la rueda describirá un arco igual a DC o h i durante el movimiento CB' el arco descrito por la circunferencia será $-\epsilon\times A'C$.

Sea, por consiguiente, $d\alpha$ el arco descrito por la circunferencia B cuando esta pasa de B en B', se tendrá

$$d\alpha=h-\epsilon\times A'C$$

Luego, si α es el arco total descrito por la rueda, se tendrá

$$\alpha=\Sigma h-A'C\,\Sigma\,\epsilon$$

Como $\Sigma\,\epsilon=0$, quedará

$$\alpha=\Sigma h$$

Por consiguiente

$$A=l\alpha$$

Es fácil estender la demostracion al caso de una curva de forma cualquiera, basta observar que un punto interior a la curva es siempre encontrado un número impar de veces por el brazo AM, i que el número de encuentros de sentido positivo es superior de una unidad al número de encuentros de sentido negativo; del mismo modo, un punto esterior a la curva es siempre encontrado por el brazo AM un número par de veces, la mitad son encuentros de sentido positivo i la otra mitad de sentido negativo. En resúmen, la suma aljebráica de las áreas descritas por el brazo AM queda siempre igual al área contenido en la curva.

CAPÍTULO IX

ÁREAS DE LAS SUPERFICIES CURVAS

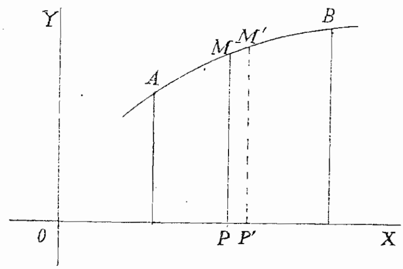
Superficies de revolucion

Sea OX el eje de la superficie i AB una porcion de la curva meridiana contenida en el plano XOY; un elemento MM' de la curva AB enjendrará un tronco de cono. Sean $MM'=ds$; $MP=y$; el área lateral del tronco de cono enjendrado por MM tiene por espresion

$$2\,\pi\,y\,ds$$

Luego el área enjendrado por una porcion AB de curva será igual a

$$2\pi\int y\,ds$$



Ejemplos.

Superficie de la esfera. — La curva meridiana tiene por ecuacion

$$x^2+y^2=R^2$$

I se tiene

$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

$$ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=dx\,\frac{R}{y}$$

Luego

$$y\,ds=R\,dx$$

Sea A el área buscada se tendrá

$$A=2\pi R\int_{-R}^{+R}dx=4\pi R^2$$

Si se busca el área de la zona comprendida entre dos abcisas a i $a+h$ se tiene:

$$A=2\pi R\int_{a}^{a+h}dx=2\pi R h$$

Superficie enjendrada por una cicloide.

Las ecuaciones de la curva meridiana son

$$x=r\,(u-\operatorname{sen} u)$$

$$y=r\,(1-\cos u)$$

De estas se deduce como se ha indicado mas arriba

$$ds = 2\, r \operatorname{sen} \frac{u}{2} du$$

Luego

$$y\, ds = 2\, r^2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} (1 - \cos u)\, du$$

Llamando A el area enjendrado por la porcion de cicloïde que corresponde a una vuelta entera de la circunferencia jenetriz se tendrá

$$A = 4\, \pi\, r^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{u}{2} (1 - \cos u)\, du$$

O bien

$$A = 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} 3 \operatorname{sen} \frac{u}{2} du - 2\pi\, r^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{3\, u}{2}\, du = \frac{64}{3} \pi\, r^2$$

Evaluacion del área de una porcion de esfera.

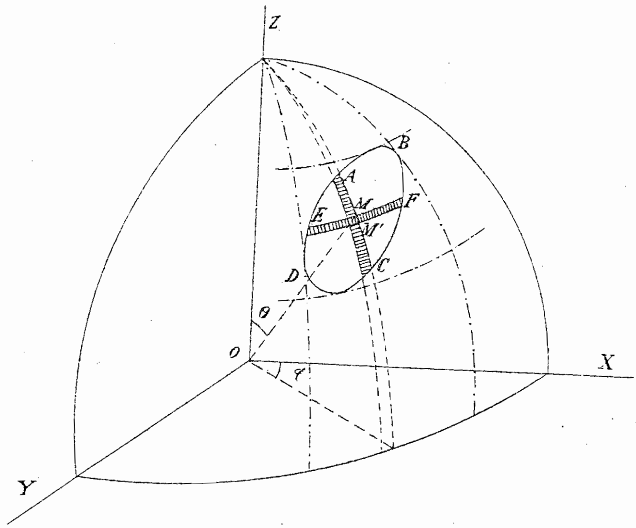
Un punto situado sobre una esfera de radio dado es determinado cuando se da el ángulo θ que hace el radio OM con un eje fijo OZ i el ángulo M que hace el plano ZOM con otro plano fijo ZOX; por esta razon se dice que θ i ϕ son los coordenadas esféricas del punto M.

Los planos que pasan por OZ se llaman jeneralmente *meridianos* i los planos perpendiculares al mismo eje se llaman *paralelos;* tambien el ángulo θ se designa jeneralmente con el nombre de *distancia polar* del punto M.

Una ecuacien entre θ i ϕ determinará cierta curva trazada sobre la esfera; sea, por ejemplo, $ABCD$ una curva esférica que tiene por ecuacion

$$f(\theta, \phi) = 0$$

Para evaluar el área de la porcion de esfera comprendida en el interior de la curva, se considera el área elemental comprendido entre dos meridianos i dos paralelos infinitamente próximos; estos planos determinan, por su interseccion con la esfera,



un rectángulo infinitamente pequeño; sean θ i ϕ son las coordenadas de M, se trazan dos *paralelos* de distancias polares θ i $\theta + d\theta$ i dos meridianos que hacen con ZOX los ángulos ϕ i $\phi + d\phi$; sea R el radio de la esfera; el área de la porcion de esfera comprendida entre estos planos tendrá por valor

$$R^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi$$

Para obtener el área total se sumarán, en primer lugar, todos los rectángulos comprendidos entre los meridianos ϕ i $\phi + d\phi$ esta suma se podrá representar por la integral

$$R^2 \, d\phi \int \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

En la figura el meridiano de M corta la curva en los puntos A i C; sean θ_1 i θ_2 las distancias polares de estos dos puntos;

la integral deberá ser tomada entre los límites θ_1 i θ_2; estos dos límites son funciones determinadas de ϕ i se deducen de la ecuacion de la curva.

Luego se podrá escribir

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen}\,\theta\, d\,\theta = F\,(\phi)$$

Asi el área comprendido en la banda infinitamente delgada AC tiene por espresion

$$R^2 d\,\phi\, F\,(\phi)$$

Para obtener el área total se sumarán las áreas de todas las bandas como AC comprendidas entre los dos meridianos tanjentes a la curva. Sean A el area total ϕ', ϕ'' los ángulos que hacen los dos meridianos tanjentes a la curva con el plano ZOX (ángulos que determinara tambien la ecuacion de la curva) se tendrá

$$A = R^2 \int_{\phi'}^{\phi''} F\,(\phi)\, d\phi$$

O bien

$$A = R^2 \int_{\phi'}^{\phi''} d\,\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen}\,\theta\, d\,\theta \tag{1}$$

NOTA.—En vez de sumar todos los rectángulos infinitamente pequeños comprendidos entre dos meridianos infinitamente próximos, se puede tambien sumar primero los rectángulos infinitamente pequeños comprendidos entre los dos paralelos θ i $\theta + d\theta$, esta suma tendria entonces por espresion

$$R^2\ \text{sen}\ \theta\ d\theta \int d\phi$$

Los límites de ϕ serán determinados por la ecuacion de la curva; en la figura el paralelo de M corta la curva en los puntos E i F; sean ϕ_1, ϕ_2 los valores de ϕ para estos puntos. Como en el caso anterior ϕ_1 i ϕ_2 son funciones de θ, de manera que se podrá escribir

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \psi(\theta)$$

Se designa por $\psi(\theta)$ el valor de esta integral; el área comprendido entre los dos paralelos infinitamente próximos será

$$R^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, \psi(\theta)$$

Para obtener el área total A se sumarán las áreas de todas las bandas, como EF, comprendidas entre los dos paralelos tanjentes a la curva.

Sean θ', θ'' las distancias polares de estos dos paralelos, se tendrá

$$A = R^2 \int_{\theta'}^{\theta''} \operatorname{sen} \theta \, \psi(\theta) \, d\theta$$

O bien

$$(2) \qquad A = R^2 \int_{\theta'}^{\theta''} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi$$

Las dos fórmulas (1) i (2) muestran que se puede intervertir el órden de las integraciones; por este motivo se escribe ordinariamente

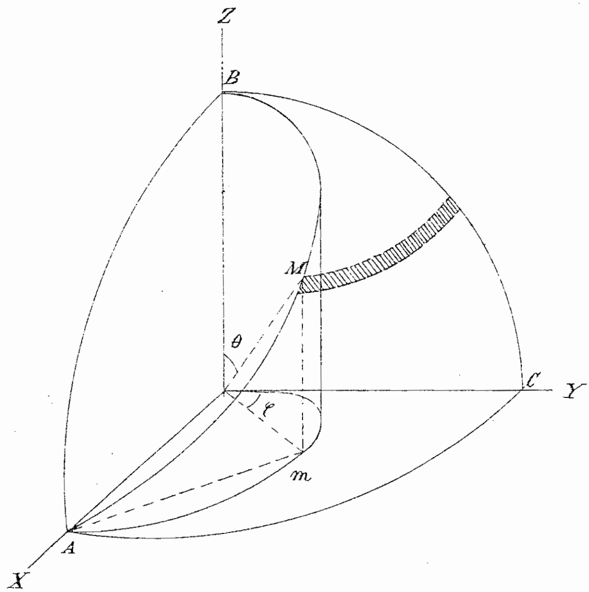
$$A = R^2 \int \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi$$

Los límites se fijan a medida que se hacen las integraciones sucesivas.

Mas adelante se dará esta misma fórmula como caso particular de la evaluacion del área de una porcion de superficie cualquiera.

Problema de Viviani.—Se considera una esfera i tres ejes rectangulares; en el plano XOY se traza una circunferencia

OmA de diámetro igual al radio de la esfera OA; el cilindro recto de base OmA i paralelo a OZ corta la esfera segun una



curva BMA, se trata de avaluar el área de la porcion de esfera que queda afuera del cilindro i limitada por los tres planos de coordenadas.

Buscaremos en primer lugar la ecuacion esférica de la curva de interseccion; sea M un punto de esta curva i θ, ϕ sus coordenadas esféricas; m la proyeccion de M sobre el plano XOY. Los dos triángulos MOm, mOA son iguales por ser rectángulos en m i tener su hypotenusa igual: $OA = OM$ i el cateto Om comun.

Luego la ecuacion esférica de la curva de interseccion es

$$\theta = \phi$$

Sea A el área buscado, se tiene

$$A = R^2 \qquad \text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi$$

Sumaremos primero los elementos de superficie comprendidos entre dos paralelos θ i $\theta+d\theta$; es decir, haremos una primera integracion en la cual se supone θ constante. Los límites de variaciones de ϕ serán $\phi=0$ i $\phi=\theta$, luego

$$\int_0^\theta d\phi=\theta$$

I

$$A=R^2\int \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

Los límites de variacion de θ serán aquí $\theta=o$ hasta $\theta=\frac{\pi}{2}$

Por consiguiente

$$A=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

Se hará una integracion por partes i se tendrá

$$\int \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta = -\theta \cos \theta + \int \cos \theta \, d\theta = -\theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta$$

Luego

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta = 1$$

$$A=R^2$$

Asi la parte de la superficie esférica que ha quedado afuera del cilindro tiene un área igual al cuadrado construido sobre el radio.

CAPÍTULO X

VOLÚMENES

Cuando las secciones hechas en una superficie por una serie de planos paralelos infinitamente próximos tienen áreas de fácil evaluacion, el volumen limitado por la superficie se puede obtener por medio de una solà integracion.

Superficies de revolucion.

Asi, sea AB la curva meridiana de una superficie de revolucion, OX el eje de esta superficie i OY un eje perpendicular a OX, en el plano de AB. Si $y=f(x)$ es la ecuacion de la curva AB i M uno de los puntos de la curva, el volúmen enjendrado por un elemento MM' de la curva será un tronco de cono de altura dx. Como se pueden despreciar los infinitamente pequeños de orden superior se podrá reemplazar, el tronco de cono por un cilindro de base πy^2 i de misma altura dx.

Luego si V es el volúmen limitado por la superficie i dos pla nos perpendiculares al eje i de abcisas a i b se tendrá

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

Esfera.

La curva meridiana tiene por ecuacion

$$x^2+y^2=R^2$$

Luego

$$V=\pi\int_a^b (R^2-x^2)\,dx=\pi R^2(b-a)-\pi\frac{b^3-a^3}{3}$$

Si $b-a=h$ se escribirá

$$V=\pi h\left\{R^2-\frac{b^2+a^2+ab}{3}\right\}$$

Para la esfera entera se tomará $b=R$, $a=-R$, entonces

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Volúmen enjendrado por una cicloide que jira al rededor de su base.

Se tiene en este caso

$$x=r(u-\operatorname{sen} u)$$

$$y=r(1-\cos u)$$

Luego

$$V = \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos u)^3 \, du = 5 \pi r^3$$

Superficies en que las secciones por planos paralelos dan secciones semejantes.

Cono.

Sea B la base de un cono i H su altura, x la distancia al vértice de una seccion paralela a la base, b el área de esta seccion, se tiene para el volúmen

$$V = \int_0^H b dx$$

Ahora

$$b = B \frac{x^2}{H^2}$$

Luego

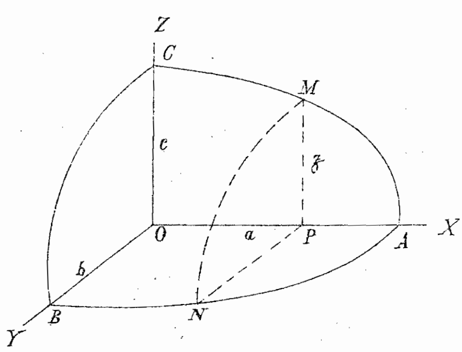
$$V = \frac{B}{H^2} \int_0^H x^2 \, dx = \frac{1}{3} BH$$

Elipsoide.

Sea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la ecuacion de la superficie referida a tres ejes de coordenadas rectangulares, si se corta por planos perpendiculares a OX, las secciones serán elipses semejantes a la elipse COB; esta tiene por área $\pi c b$, luego la elipse MPN que tiene por abcisa x tendrá por área



$$\pi c b \frac{z^2}{c^2}$$

Ahora la ecuacion de la elipse AMC es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Luego el área de la elipse MPN será tambien

$$\pi cb\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

I el volúmen del elipsoide sera

$$V=\pi bc\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc$$

Volúmenes por medio de una doble integracion.

Es el caso jeneral en que se considera una superficie S de ecuacion

$$z=F(x,y)$$

i el volúmen de un cilindro recto limitado por la superficie i que tiene por base, en el plano XOY, una curva C de ecuacion

$$f(x,y)=0$$

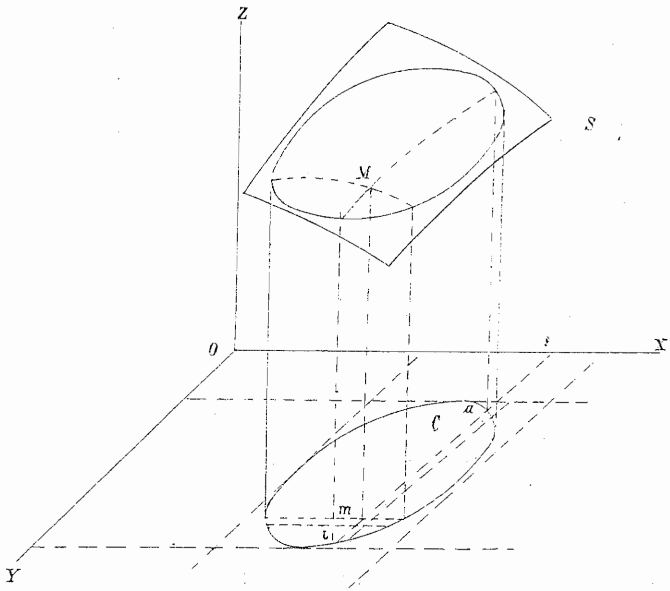
Sea entonces M un punto de S i m la proyeccion de este punto sobre XOY; en m se considera un rectángulo infinitamente pequeño de lados dx, dy; i un prisma de base $dxdy$ i limitado a la superficie dada.

El volúmen de este prisma infinitamente delgado, podrá ser tomado igual a $zdxdy$, pues se desprecian así infinitamente pequeños de órden superior a los que se conservan.

Sea V el volúmen total buscado; para obtener V se sumarán en primer lugar todos los prismas comprendidos entre los planos de abcisas x, $x+dx$; esta suma será representada por

$$dx\int zdy$$

En esta integral, z debe ser reemplazado por su valor $F(x,y)$ i x debe ser considerado como una constante, pues para todos los prismas considerados x queda constante; los límites se deducirán de la ecuacion de la curva C; en efecto, esta ecuacion dará las ordenadas de los puntos de C que tienen por abcisa x.



Sea, en la figura fm la ordenada de m i a, b los puntos de encuentro con la curva C; y_1, y_2 las ordenadas de estos últimos puntos; estas ordenadas serán naturalmente funciones de x, de manera que se podrá escribir

$$\int_{y_1}^{y_2} z dy = \int_{y_1}^{y_2} F(x, y)\, dy = \phi(x)$$

Así la suma de los volúmenes de los prismas comprendidos entre los planos x, $x+dx$ será representada por

$$dx\, \phi(x)$$

El volúmen total será la suma de estas espresiones cuando x varia entre los límites correspondientes a las dos tanjentes a la curva C paralelas al eje OY; sean x' x'' estas abcisas se tendrá

$$V=\int_{x'}^{x''} \phi(x)\, dx=\int_{x'}^{x''} dy \int_{y_1}^{y_2} F(x,y)\, dy$$

NOTA.—Se puede tambien sumar primero los prismas infinitamente delgados comprendidos entre los dos planos y, $y+dy$, i en seguida hace variar y entre los límites correspondientes a las dos tanjentes a la curva C paralelas al eje OX se obtendria asi

$$V=\int_{y'}^{y''} dy \int_{x_1}^{x_2} F(x,y)\, dx$$

Se ve entonces, como se ha visto ya mas arriba, que se puede intervertir el orden de las integraciones; por esto se escribe jeneralmente

$$V=\iint dx\, dy\, F(x,y)$$

Ejemplo.

Volúmen del elipsoide.

En este caso la ecuacion de la superficie S sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

i la de la curva C

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Para mas facilidad calcularemos la parte del volúmen comprendida entre los tres planes de coordenadas; esta parte será la octava la parte del volúmen total i se tendrá

$$V=8\int_{o}^{b} dy \int_{o}^{x_1} z\, dx$$

Se ha designado por x_1 la abcisa que corresponde sobre la curva C, a la coordenada y, de manera que la espresion

$$dy\int_0^x zdx$$

representa la suma de los volúmenes de los prismas comprendidos entre los planos de ordenadas $y, y+dy$.

La ecuacion de la curva C nos da

$$x_1 = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$

I la ecuacion de la superficie da tambien

$$z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

O bien

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{x_1{}^2 - x^2}$$

Luego

$$\int_0^{x_1} zdx = \frac{c}{a}\int_0^{x_1}\sqrt{x_1{}^2-x^2}\,dx = \frac{\pi c}{4a}x_1{}^2$$

O bien

$$\int^{x_1} zdx = \frac{\pi c}{4a}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

I

$$V = 2\,\pi ac\int_0^b\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = \frac{4}{3}\pi\,abc$$

Cuando la curva C del plano XOY se espresa con mas facilidad por medio de coordenadas polares ρ i ω se toma, como base del prisma elemental, un rectángulo infinitamente pequeño comprendido entre las direcciones θ i $\theta+d\theta$ i las circunferencias de radio ρ i $\rho+d\rho$. El área de este rectángulo es $\rho\, d\rho\, d\omega$, luego el volúmen tendrá por espresion

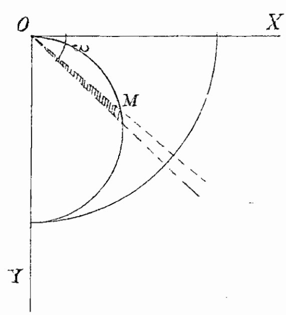
$$V=\iint z\,\rho\, d\rho\, d\omega$$

i los límites de las integraciones dependen, como en el caso anterior de la forma de la curva C.

Ejemplo.

Volúmen comprendido en un cilindro recto limitado por una esfera i que tiene por seccion recta una media circunferencia descrita sobre el radio de la esfera.

La figura será la que se refiere al problema de Viviani; representaremos aqui la curva C del plano XOY. Si se suman en primer lugar los volúmenes de los prismas comprendidos entre las direcciones ω i $\omega+d\omega$. Se deberá calcular la espresion



$$d\omega\int_0^{OM} z\,\rho\, d\rho$$

La ecuacion de la superficie es

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

O bien

$$\rho^2+z^2=R^2$$

Luego

$$z=\sqrt{R^2-\rho^2}$$

La curva C tiene tambien por ecuacion

$$\rho=R\sin\omega$$

I se tendrá

$$\int_0^{OM} z\rho\, d\rho = \int_0^{R \sin \omega} \sqrt{R^2-\rho^2}\ \rho\, d\rho = \frac{R^3}{3}(1-\cos^3\omega)$$

En seguida

$$V = \frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega(1-\cos^3\omega) = \frac{\pi R^3}{6} - \frac{2}{9}R^3$$

El primer término representa precisamente el volúmen de la porcion de esfera comprendida entre los tres planos de coordenadas, de manera que el cilindro deja en esta porcion de esfera un volúmen igual a $\frac{2}{9}R^3$.

Volúmenes por medio de integrales triples

Un punto en el espacio puede ser fijado por coordenadas polares: su distancia ρ al oríjen i los ángulos llamados anteriormente θ i ϕ.

El volúmen definido por una superficie cualquiera podrá ser considerado como el límite de la suma de una infinidad de paralelípidos comprendidos entre dos esferas de radios ρ i $\rho+d\rho$; dos meridianos ϕ i $\phi+d\phi$ i dos conos de apertura θ i $\theta+d\theta$. El volúmen de este paralelípedo será igual al producto de su base por su altura. La base es un elemento de superficie de la esfera de radio ρ; su área sera ρ^2 sen $\theta\, d\theta\, d\phi$; la altura es $d\rho$, luego

$$V = \iiint \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, d\rho$$

Los límites seran todavia fijados por las integraciones sucesivas i la forma de la superficie que limita el volúmen considerado

Ejemplo.

Sea la esfera de ecuacion

$$\rho = 2R \operatorname{sen}\theta \cos \int$$

Es una esfera de radio R tanjente en el oríjen al plano ZOY, busquemos el volúmen de esta esfera. Se hace en primer lugar, la integracion respecto a ρ es decir suponiendo ϕ i θ constantes se tiene entonces

$$V = \iint \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \left[\rho^2 d\rho \right.$$

La última integral se tomará entre los límites $\rho = 0$ $\rho = 2\, R \operatorname{sen}\theta \cos\phi$ luego

$$V = \frac{8}{3} R^3 \iint \sin^4\theta \cos^3\phi\, d\theta\, d\phi$$

Ahora se supondrá ϕ constante i θ variable; los límites de variacion de θ serán cero i π i se tiene

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta = \frac{3}{8}$$

Luego

$$V = R^3 \int \cos^3\phi\, d\phi$$

Los límites seran ahora $\phi = -\frac{\pi}{2}$ i $\phi = +\frac{\pi}{2}$; por consiguiente

$$V = R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3\phi\, d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

ALBERTO OBRECHT

Director del Observatorio Astronómico
Profesor de las clases de mecánica i cálculo diferencial e integral de la Universidad

FIN DE LA PRIMERA PARTE