SOBRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

DEL SEGUNDO ÓRDEN

I DEL PRIMER GRADO ENTRE $n+1$ VARIABLES

En todas las teorías físicas, las ecuaciones diferenciales parciales desempeñan el papel principal, puesto que las leyes fundamentales de los fenómenos tienen por enunciado ecuaciones diferenciales. Para establecer estas teorías, es preciso admitir la existencia de moléculas i de fuerzas atractivas i repulsivas que obran entre ellas, sin que la esperiencia nos pueda informar sobre la naturaleza de estos elementos de la materia, pero esta circunstancia no modifica la verdad de que aquellas ecuaciones enuncian efectivamente las verdaderas leyes fundamentales de la naturaleza. Pues, las consecuencias deducidas de estas leyes diferenciales han sido rigurosamente comprobadas por la esperiencia, i basta llamar la atencion hácia el asombroso descubrimiento del planeta Neptuno por medio de los cálculos de Leverrier, para convencer a quien dudare de esto.

Así es que desde el año 1747, época en que d'Alembert resolvió por primera vez un problema físico por medio de ecuaciones diferenciales parciales, éstas no han dejado de influir cad vez mas en nuestras ideas sobre los ajentes de la naturaleza, convirtiendo algunos ramos de la ciencia física en verdaderas pertenencias de las matemáticas especulativas. Miéntras así la física daba un nuevo impulso al desarrollo de las matemáticas, éstas, a su vez, suministraban a aquélla un fundamento en que se ha podido cimentar el magnífico edificio de las teorías de la física moderna.

Entre las ecuaciones diferenciales parciales, las del segundo órden son mas usadas en física i, por esto, es cuestion primordial de las matemáticas el encontrar las soluciones jenerales de estas ecuaciones para someterlas a la comprobacion de la esperiencia. Pues, como las leyes enunciadas por las ecuaciones diferenciales, solo se refieren a lo infinitamente pequeño, la exactitud de estas leyes no puede comprobarse de otro modo que integrándolas i pasando por este medio de lo infinitamente pequeño a lo perceptible. Por esto para atender bien a las necesidades de la ciencia física, es necesario que se encuentren métodos jenerales para integrar, es decir, resolver las ecuaciones diferenciales parciales, i los ilustres nombres de Fourier, Bernoulli, Laplace, Jacobi, etc., demuestran la importancia que, desde tiempo há, se atribuye en los círculos matemáticos al desarrollo de este ramo de la ciencia.

Para la integracion de las ecuaciones diferenciales parciales del segundo órden i primer grado puede ser ventajoso reducirlas a sistemas de ecuaciones diferenciales del primer órden, i la esposicion que hago ai presente, tiene por objeto establecer las condiciones bajo las cuales la ecuacion diferencial parcial mas jeneral del segundo órden i primer grado puede ser equivalente a un sistema de dos ecuaciones diferenciales del primer órden i primer grado (*).

I.°

La forma mas jeneral de las ecuaciones diferenciales en cuestion, es la siguiente:

$$\text{I.}^{\circ} \quad \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} A_{hi} \frac{d^2 V}{dx_k dx_i} + \sum_{k=1}^{k=n} a_k \frac{d V}{dx_k} = b_1 V + b_2,$$

(*) Para el caso especial de dos variables independientes esta cuestion ha sido tratada por el señor Dr. F. Engel en los *Anales de la Real Academia Sajona de Ciencias, Seccion Fisico-matemática* del año 1882.

siendo V una funcion de las variables independientes $x_1, x_2, \ldots x_n$; los coeficientes A_{hi}, a_k, b_1 i b_2 serán tambien funciones conocidas de las mismas variables. Sin perjuicio a la jeneralidad de la ecuacion 1.° puede admitirse que

$$A_{hi} \equiv A_{ih} (*) \text{ i } A_{11} \gtreqless 0,$$

si bien sucediera que una u otra de las cantidades A_{ii} fuera igual a cero.

Bajo ciertas condiciones que serán enunciadas mas adelante, la ecuacion diferencial propuesta es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma siguiente:

$$2.^{\circ} \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{h=1}^{h=n} r_h \frac{du}{dx_h} = b_1 V + b_2 \\ &\sum_{i=1}^{i=n} s_i \frac{dV}{dx_i} = u \end{aligned} \right.$$

siendo u una nueva variable independiente i funcion de $x_1, x_2, \ldots . x_n$. Pues, eliminando a u en este sistema, tenemos:

$$3.^{\circ} \quad \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} r_h \left(\frac{ds_i}{dx_h} \frac{dV}{dx_i} \times s_i \frac{d^2 V}{dx_i dx_h} \right) = b_1 V + b_2$$

Comparando esta ecuacion con la propuesta, resulta el teorema siguiente:

Para que las ecuaciones 1.ª *i* 3.ª *sean equivalentes es necesario que se pueda satisfacer simultáneamente a las* $\frac{n(n+3)}{2}$ *ecuaciones*

$$4.^{\circ} \quad \left\{ \begin{aligned} A_{ii} &= r_i s_i \\ 2 A_{hi} &= r_h s_i + r_i s_h \\ a_k &= \sum_{h=1}^{h=n} r_h \frac{ds_k}{dx_h} \end{aligned} \right.$$

por las 2n *cantidades* $r_1, r_2, \ldots . r_n, s_1, s_2, \ldots s_n$

(*) El signo $\equiv$ significa que la ecuacion se satisface idénticamente para todos los valores de las incógnitas, de modo que ninguna de ellas puede despejarse, por medio de esta ecuacion, en funcion de las demas.

Como $\frac{n(n+3)}{2} > 2n$, el sistema 4.° contiene mayor número de ecuaciones que de incógnitas, resultando de ahí que las incógnitas pueden ser eliminadas en este sistema, siempre que las ecuaciones que lo forman, sean independientes una de otra. La eliminacion de las incógnitas dará por resultado cierto número de ecuaciones entre los coeficientes del primer miembro de la ecuacion propuesta, ecuaciones que formarán las condiciones bajo las cuales la ecuacion 1.ª es equivalente a la 3.ª i, de consiguiente, al sistema 2.° Como $\frac{n(n+3)}{2}$ es el número de las ecuaciones, $2n$ el de las incógnitas, se observa que el número de condiciones ha de ser $\frac{n(n+3)}{2} - 2n$ o sea $\frac{n(n-1)}{2}$.

Para encontrar estas condiciones, es preciso notar que de las $\frac{n(n+3)}{2}$ ecuaciones 4.°, $\frac{n(n-1)}{2}$ son ecuaciones aljebráicas. A éstas se les puede dar la forma siguiente:

$$5.° \left\{ \begin{array}{l} r_h\, s_i + r_i\, s_h = 2\, A_{hi} \\ r_h\, s_i - r_i\, s_h = \pm 2\sqrt{A_{hi}^2 - A_{ii}\, A_{hh}} \equiv 2\Delta_{hi} \end{array} \right.$$

La segunda de estas ecuaciones nos da la definicion de las cantidades Δ_{hi} que obedecen, como se ve, a las condiciones:

$$\Delta_{hi} \equiv \Delta_{ih} \text{ i } \Delta_{ii} \equiv 0$$

Combinando las ecuaciones

$$r_i\, s_i = A_{ii}$$

con las 5.°, la soluciones de las ecuaciones aljebráicas son las siguientes:

$$6.° \left\{ \begin{array}{l} r_i = \dfrac{A_{ii}}{s_i} \\ \dfrac{s_i}{s_h} = \dfrac{A_{hi} + \Delta_{hi}}{A_{hh}} \end{array} \right.$$

Estas ecuaciones no determinan mas que las razones que guardan entre sí las s_i i s_h, pero no los mismos valores de estas cantidades, o lo que es lo mismo, por las ecuaciones 6.° quedan determinadas todas las cantidades r_i i s_i con excepcion de una sola, o en otros términos: los valores de las r_i se presentan como productos que tienen un factor indeterminado.

Las operaciones que efectuaremos para encontrar el valor de este factor indeterminado, nos suministrarán al mismo tiempo las condiciones buscadas.

Pues, reemplazando en las ecuaciones

$$a_k = \sum_{h=1}^{h=n} r_h \frac{ds_k}{dx_h}$$

las r_h por los valores que resultan de 6.º, obtenemos:

$$7.^{\circ} \quad a_k = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{A_{hh}}{s_h} \frac{ds_k}{dx_h}$$

Si estas ecuaciones no son contradictorias a las otras

$$8.^{\circ} \quad \frac{s_i}{s_h} = \frac{A_{hi} + \Delta_{hi}}{A_{hh}},$$

los valores de las r_i i s_i pueden ser determinados efectivamente por medio de las ecuaciones del sistema 4.º Las condiciones bajo las cuales las ecuaciones 7.º no son contradictorias a las 8.º, son al mismo tiempo las necesarias para que la ecuacion 1.ª sea equivalente a la 3.ª o, en otros términos, para que la ecuacion 1.ª sea equivalente a un sistema 2.º Para encontrarlas usamos las ecuaciones:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{A_{hh}}{s_h} \frac{ds_k}{dx_h} a_k =$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{A_{hh}}{s_h} \frac{ds_i}{dx_h} = a_i$$

i la igualdad:

$$\frac{d\frac{s_k}{s_i}}{dx_h} = \frac{1}{s_i} \frac{ds_k}{dx_h} - \frac{s_k}{s_i^2} \frac{ds_i}{dx_h}$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por $\frac{1}{s_i}$, la segunda por $\frac{s_k}{s_i^2}$ i restando, tenemos:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{A_{hh}}{s_h} \left(\frac{1}{s_i} \frac{ds_k}{dx_h} - \frac{s_k}{s_i^2} \frac{ds_i}{dx_h} \right) = \frac{a_k}{s_i} - \frac{s_k}{s_i^2} a_i$$

o bien:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{A_{hh}}{s_h} \cdot \frac{d\frac{s_k}{s_i}}{dx_h} = \frac{a_k}{s_i} - \frac{s_k}{s_i^2} \cdot a_i$$

i multiplicando esta ecuacion por s_i:

$$\sum_{h=1}^{h=n} A_{hh} \cdot \frac{s_i}{s_h} \frac{d\frac{s_k}{s_i}}{dx_h} = a_k - \frac{s_k}{s_i} a_i$$

Este sistema de ecuaciones se convierte en el de las condiciones buscadas, si reemplazamos en él las razones $\frac{s_i}{s_h}$ por los valores que se desprenden de 6.º, i efectuando esta operacion, resulta el teorema:

"*Para que el sistema de ecuaciones 4.º pueda ser satisfecho simultáneamente por las funciones* r_1 $r_2, \dots$ r_n s_1, $s_2, \dots$ s_n, *es necesario que los coeficientes del primer miembro de la ecuacion 1.ª llenen las condiciones siguientes:*

$$9.^{\circ} \quad C_{ki} \equiv \sum_{h=1}^{k=n} (A_{hi} + \Delta_{hi}) \frac{d\frac{A_{ki} + \Delta_{ki}}{A_{ii}}}{dx_h} - a_k + \frac{A_{ki} + \Delta_{ki}}{A_{ii}} a_i \equiv 0,$$

condiciones en las cuales a los índices k *é* i *se les puede atribuir cada uno de los valores 1, 2,...* n."

Como $\Delta_{ii} \equiv 0$, las condiciones anteriores se satisfacen *eo ipso*, si $k=i$, de manera que el sistema 9.º es de $\frac{n(n-1)}{2}$ ecuaciones, resultado ya deducido a priori.

De lo anteriormente espuesto se desprende ademas que no existe mas que un solo sistema de valores r_i i s_i, si entre los coeficientes de la ecuacion propuesta existen las $\frac{n(n-1)}{2}$ condiciones 9.º i ninguna mas que éstas.

Ahora bien, llenándose realmente todas las condiciones $C_{ki} \equiv 0$ las ecuaciones 4.º se resuelven de la manera siguiente:

Las ecuaciones 6.º han dejado indeterminado uno de los valores s, i como hemos admitido que $A_{11} \gtreqless 0$, será conveniente tomar s_1 por factor indeterminado que ha de determinarse por medio de la ecuacion diferencial

$$10.^{\circ} \quad a_1 = \sum_{h=1}^{h=n} r_h \frac{ds_1}{dx_h}$$

Ahora bien, de las ecuaciones 6.º se desprende:

$$s_i = s_1 \frac{A_1 + \Delta_{1i}}{A_{11}}$$

i reemplazando s_i por este valor en la 2.ª de las ecuaciones 6.º tenemos:

$$\frac{1}{s_h} = \frac{A_{11}}{s_1} \cdot \frac{1}{A_{hh}} \cdot \frac{A_{hi} + \Delta_{hi}}{A_{1i} + \Delta_{1i}}$$

i como

$$r_h = \frac{A_{hh}}{s_h},$$

resulta que

$$r_h = \frac{A_{11}}{s_1} \cdot \frac{A_{hi} + \Delta_{hi}}{A_{1i} + \Delta_{1i}}.$$

Sustituyendo, en la ecuacion 10.ª, r_h por este valor, se vé que s_1 es la solucion de la ecuacion:

$$s_1 \, a_1 \, (A_{1i} + \Delta_{1i}) = A_{11} \sum_{h=1}^{h=n} (A_{hi} + \Delta_{hi}) \frac{ds_1}{dx_h}$$

o bien:

$$11.^{a} \quad a_1 (A_{1i} + A_{1i}) = A_{11} \sum_{h=1}^{h=n} (A_{hi} + \Delta_{hi}) \frac{d \log s_1}{dx_h}$$

Como, en esta ecuacion, la suma solo se estiende sobre el índice h, pudiendo atribuirse a i cada uno de los valores 1, 2, . . . n, la ecuacion 11ª representa un sistema de n ecuaciones, cuya solucion comun es s_1. Mas adelante vamos a establecer las condiciones, bajo las cuales este sistema admite una solucion comun.

Ahora bien, habiéndose encontrado el valor de s_1, las soluciones del sistema 4.º son las siguientes:

$$12.^{\circ}\quad \begin{cases} s_h = s_1 \cdot \dfrac{A_{1h}+\Delta_{1h}}{A_{11}}, \quad h=2, 3, \ldots n \\ r_1 = \dfrac{A_{11}}{s_1}, \quad r_h = \dfrac{A_{h1}-\Delta_{h1}}{s_1}, \quad \dfrac{s_i}{s_h} = \dfrac{A_{hi}+\Delta_{hi}}{A_{hh}} \end{cases}$$

De lo arriba espuesto se deduce el teorema siguiente:

"*Si, bajo la suposicion de que* $A_{11} \gtrless 0$, *se satisfacen las* $\frac{n(n-1)}{2}$ *condiciones* $C_{ki} \equiv 0$, *la ecuacion diferencial parcial 1.ª es equivalente al sistema 2.º, cuyos* 2n *coeficientes* r *i* s *se determinan por medio de las ecuaciones 11.º i 12.º*"

II

El teorema anterior no es válido mas que en el caso de que al ménos una de las n cantidades A_{ii} sea diferente de cero. Réstanos, pues, considerar el caso de que

$$A_{11} \equiv A_{22} \equiv A_{33} \equiv \ldots \equiv A_{nn} \equiv 0.$$

En este caso, las ecuaciones 4.º se trasforman en las siguientes:

$$4a, \quad \begin{cases} 0 = r\ s_i \\ 2A_{hi} = r_h\ s_i + r_i\ s_h \\ a_k = \sum\limits_{h=1}^{h=n} r_h \dfrac{ds_k}{dx_h} \end{cases}$$

Para satisfacer a las n ecuaciones $r_i\ s_i = 0$, es necesario que al ménos n de las cantidades r_i i s_i sean iguales a cero i de tal modo que, si $r_1, r_2, \ldots r_m$ son iguales a cero, lo han de ser tambien las $s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots s_n$. Asimismo se nota que $a_i \equiv 0$, siempre que $s_i \equiv 0$.

Supongamos ahora que, si algunas de las cantidades s_i son iguales a cero, no lo sea s_1, de modo que, para satisfacer a la ecuacion $r_1\ s_1 = 0$, es necesario admitir que $r_1 = 0$.

Para entrar a resolver el sistema 4a., demos por sentado que a las ecuaciones $r_i\ s_i = 0$ se les satisfaga por

$$13.^{\circ}\quad \begin{cases} r_1 = r_2 = \ldots = r_{n-m} = 0 \\ s_{n-m+1} = s_{n-m+2} = \ldots = s_n = 0 \end{cases}$$

de modo que tambien

$$14.^{\circ} \quad a_{n-m+1} \equiv a_{n-m+1} \equiv \ldots . \equiv a_n \equiv 0$$

Estas ecuaciones representan m de las $\frac{n(n-1)}{2}$ condiciones que han de llenarse para que se pueda satisfacer a las $\frac{n(n+3)}{2}$ ecuaciones 4.ª) por medio de las $2n$ cantidades r_i i s. Para encontrar las demas condiciones, es preciso observar que, a consecuencia de las ecuaciones

$$2\ A_{hi} = r_h\ s_i + r\ \ s_h$$

todas las cantidades

$$15.^{\circ}\ A_{p,q} = 0$$

si a p le corresponde uno de los números 1, 2 . . . $n-m$ i a q uno de los números 2, 3. . . $n-m-1$. Estas son otras $\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$ de las condiciones que buscamos. Ademas de esto, deducimos del mismo modo que deben cumplirse las condiciones

$$16.^{\circ} \quad A_{\mu,\nu} = 0$$

si a los índices μ i ν corresponden respectivamente los valores $n-m+1$, $n-m+2$. . . n i $n-m+2$, $n-m+3$. . . . $n-1$. El número de las condiciones 16.º es $\frac{m(m-1)}{2}$.

Como, entre todas, han de establecerse $\frac{n(n-1)}{2}$ condiciones, resulta que faltan todavía

$$\frac{n(n-1)}{2} - m - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = m(n-m-1)$$

de ellas. Para encontrarlas, debemos considerar aquellas de las ecuaciones 4a) que no caen bajo las condiciones 14.º, 15.º i 16.º, esto es, las siguientes:

$$17.^{\circ} \quad \begin{cases} 2A_{hi} = r_i s_h \\ a_k = \sum\limits_{l=n-m+1}^{l=n} r_l \dfrac{ds^k}{dx_l} \end{cases}$$

en las cuales corresponden a los índices los valores que pasamos a indicar:

$$h = 1, 2, \ldots n-m$$
$$i = n-m+1, n-m+2, \ldots n$$
$$k = 1, 2, \ldots n-m$$

El número de las ecuaciones que restan es $m(n-m)+n-m$ o sea $(m+1)(n-m)$. Para satisfacerlas por medio de n incógnitas, es preciso que entre sus coeficientes existan todavía

$$(m+1)(n-m)-n = m(n-m-1)$$

condiciones, resultado que ya ántes hemos deducido.

En el caso especial de que $m = n-1$, bastan las condiciones ya deducidas, i no es necesario deducir otras.

Entre las $(m+1)(n-m)$ ecuaciones que componen el sistema 17.°, $m(n-m)$ son aljebráicas i pueden determinarse por medio de ellas las razones $\frac{s\mu}{s\nu}$ del modo siguiente:

$$\frac{s_\mu}{s_\nu} = \frac{A_{\mu,i}}{A_{\nu,i}}$$

teniendo los índices los valores que vamos a indicar:

$$\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots n-m$$

$$i = n-m+1, n-m+2, \ldots n.$$

Como la razon $\frac{s\mu}{s\nu}$ depende del índice variable i, resulta que $\frac{A\mu, i}{A\nu, i}$ tiene un valor constante para todos los valores de i comprendidos entre $n-m+1$ i n. Escribiendo estas condiciones in extenso, se vé que son las siguientes:

$$18. \quad \frac{A_{\mu, n-m+1}}{A_{\nu, n-m+1}} = \frac{A_{\mu, n-m+2}}{A_{\nu, n-m+2}} = \ldots = \frac{A_{\mu, n}}{A_{\nu, n}}$$

Este sistema de $\frac{(m-1)(n-m)(n-m-1)}{2}$ condiciones se reduce, sin embargo, a otro sistema de menor número de condiciones, pues fácil es ver que todas estas condiciones pueden deducirse de las otras:

$$19. \quad \frac{A_{\mu, n-m+1}}{A_{1, n-m+1}} = \frac{A_{\mu, n-m+2}}{A_{1, n-m+2}} = \ldots\ldots \frac{A_{\mu, n}}{A_{1, n}}$$

i este sistema no representa mas que

$$(m-1)\ (n-m-1)$$

ecuaciones. Las $n-m-1$ condiciones que nos faltan todavía, se deducen del modo siguiente:

De las ecuaciones 17.º se desprende:

$$r_l = \frac{2A_{hl}}{s_h}.$$

Ahora bien, sustituyendo en la segunda de estas ecuaciones, r por su valor, i tomando en consideracion que a los índices les corresponden los valores que pasamos a indicar:

$$\left.\begin{matrix} h, \\ k, \\ p, \end{matrix}\right\} = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ n-m$$

$$\left.\begin{matrix} i, \\ l, \end{matrix}\right\} = n-m+1,\ n-m+2,\ \ldots\ldots\ n$$

tenemos las dos ecuaciones:

$$a_k = 2 \sum_{l=n-m+1}^{l=n} \frac{A_{hl}}{s_h} \cdot \frac{ds_k}{dx_l}$$

$$a_p = 2 \sum_{l=n-m+1}^{l=n} \frac{A_{hl}}{s_h} \cdot \frac{ds_p}{dx_l}.$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por $\frac{1}{s_p}$, la segunda por $-\frac{s_k}{s_p^2}$, i sumando, tenemos:

$$\frac{a_k}{s_p} - \frac{s_k}{s_p^2} a_p = 2 \sum_{l=n-m+1}^{l=n} \frac{A_{hl}}{s_h} \cdot \frac{d\,\frac{s_k}{s_p}}{dx_l}$$

o bien, multiplicando los dos miembros por s_p i reemplazando las razones $\frac{s_k}{s_p}$ por sus valores ántes encontrados, resulta que:

$$a_k - \frac{A_{ki}}{A_{pi}} a_p = 2 \sum_{l=n-m+1}^{n} A_{hl} \cdot \frac{A_{pi}}{A_{hi}} \frac{d\frac{A_{ki}}{A_{pi}}}{dx_l}.$$

Pero como

$$\frac{A_{hl}}{A_{hi}} = \frac{A_{pl}}{A_{pi}}.$$

resulta que

$$A_{hl} \cdot \frac{A_{pi}}{A_{hi}} = A_{pl},$$

de manera que estas condiciones se convierten en las otras:

$$20.^o \quad a_k - \frac{A_{ki}}{A_{pi}} a_p = 2 \sum_{l=n-m+1}^{l=n} A_{pl} \cdot \frac{d\frac{A_{ki}}{A_{pi}}}{dx_l}$$

las que, en virtud de las condiciones 19.°, no representan mas que $n-m-1$ condiciones.

Ahora bien, si se llenan todas las condiciones signadas con los números 13.°, 14.°, 15.°, 19.° i 20.°, la resolucion del sistema *4a)* se efectúa de la manera siguiente:

Las ecuaciones 17.° nos dan:

$$\frac{s_h}{s_1} = \frac{A_{hi}}{A_{1i}}$$

i

$$r_l = \frac{2A_{h,l}}{s_h}$$

o mas bien:

$$r_l = 2A_{1i} \cdot \frac{A_{hl}}{A_{hi}} \cdot \frac{1}{s_1}$$

Reemplazando, en la ecuacion:

$$a_1 = \sum_{l=n-m+1}^{l=n} r_l \frac{ds_1}{dx_l},$$

r_l por su valor, tenemos:

$$a_1 = 2 \sum_{l=n-m+1}^{l=n} A_{1i} \cdot \frac{A_{hl}}{A_{hi}} \cdot \frac{1}{s_1} \cdot \frac{ds_1}{dx_l},$$

i como, segun núm. 19.°,

$$\frac{A_{h\,i}}{A_{1\,i}}=\frac{A_{h\,l}}{A_{1\,l}}$$

tenemos:

$$A_{1} \quad = A_{1} \quad \frac{A_{h\,l}}{A_{h\,i}}$$

luego:

$$21.^{\circ}\ a_{1}=2\sum_{l=n-m+1}^{l=n} A_{1\,l}\ \frac{d\log s_{1}}{dx_{l}}$$

Encontrada la solucion de esta ecuacion diferencial parcial del primer órden i primer grado, los valores de s_h i r se determinan por medio de las ecuaciones siguientes:

$$22.^{\circ}\left\{\begin{aligned} s_{h} &= \frac{A_{h\,i}}{A_{1\,i}}\,.\,s_{1}\\ r_{l} &= 2\,.\,\frac{A_{h\,l}}{s_{h}}\end{aligned}\right.$$

III

En el primer capítulo hemos visto que la ecuacion propuesta se reduce a un sistema signado por el número 2.°, si los coeficientes de la ecuacion 1.ª llenan las $\frac{n(n-1)}{2}$ condiciones $C_{ki}=O$. Llenadas estas condiciones, la cuestion estriba en hallar una solucion comun del sistema de las n ecuaciones diferenciales parciales del primer órden i primer grado:

$$11.^{\circ}\qquad a_{1\,1}(A_{1\,i}+\Delta_{1\,i})=A_{1\,1}\sum_{h=1}^{h=n}(A_{h\,i}+\Delta_{h\,i})\frac{d\ log\ s_{1}}{dx_{h}}$$

En el caso de que estas n ecuaciones no representan mas que una sola, siempre existe una solucion comun. Para que esto tenga lugar, es necesario que se satisfagan las identidades

$$23.^{\circ}\qquad \frac{A_{k\,i}+\Delta_{k\,i}}{A_{1\,i}+\Delta_{1\,i}}=\frac{A_{k\,h}+\Delta_{k\,h}}{A_{1\,h}+\Delta_{1\,h}}$$

lo que no puede suceder sino en el caso de que

$$\Delta_{hi} \equiv 0$$

o bien:

$$A_{hi} \equiv \sqrt{A_{ii} A_{hh}}$$

Podria ser tambien que las identidades 23.° fueran derivaciones de las $C_{ki} \equiv 0$. Para averiguar, si esto tiene lugar, pongamos:

$$\frac{A_{kh} + \Delta_{kh}}{A_{1h} + \Delta_{1h}} = W_{kh}$$

i deduzcamos de las condiciones $C_{ki} \equiv 0$ las dos ecuaciones siguientes:

$$\sum_{l=1}^{l=n} W_{li} \frac{dW_{ki}}{dx_l} = \frac{A_{ii}}{(A_{1i} + \Delta_{1i})^2}(a_k - a_1 W_{ki})$$
$$\sum_{l=1}^{l=n} W_{lk} \frac{dW_{kh}}{dx_l} = \frac{A_{hh}}{(A_{1h} + \Delta_{1h})^2}(a_k - a_1 W_{kh})$$

Ahora bien, si fuera

$$W_{ki} \equiv W_{kh},$$

seria preciso que

$$\frac{A_{ii}}{(A_{1i} + \Delta_{1i})^2} \equiv \frac{A_{hh}}{(A_{1h} + \Delta_{1h})^2},$$

identidad que solo subsiste en el caso de que

$$\Delta_{1k} \equiv 0,$$

i fácil es ver que este caso se reduce al anterior.

Las consideraciones anteriores nos enseñan que el sistema de ecuaciones 11.° solo es equivalente a una sola ecuacion en el caso especial de que la identidad

$$24.° \quad A_{hi} \equiv \sqrt{A_{ii} A_{hh}}$$

subsista para todas las cantidades A_{hi}. Trátase ahora de averiguar las condiciones bajo las cuales las ecuaciones 11.° admiten una solucion comun en el caso de que no se llenen todas las identidades signadas por el número 24.°

Escribiendo todas las ecuaciones que forman parte del indicado sistema, tenemos

$$
25.^{\circ}\left\{\begin{aligned}
&\frac{a_1}{A_{11}}A_{11}=A_{11}\frac{d\log s_1}{dx_1}+(A_{21}+\Delta_{21})\frac{d\log s_1}{dx_2}+\ldots+\\
&\qquad+(A_{n1}+\Delta_{n1})\frac{d\log s_1}{dx_n}\\
&\frac{a_1}{A_{11}}(A_{12}+\Delta_{12})=(A_{12}+\Delta_{12})\frac{d\log s_1}{dx_1}+A_{22}\frac{d\log s_1}{dx_2}+\\
&\qquad+\ldots\ldots+(A_{n2}+\Delta_{n2})\frac{d\log s_1}{dx_n}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{a_1}{A_{11}}(A_{1n}+\Delta_{1n})=(A_{1n}+\Delta_{1n})\frac{d\log s_1}{dx_1}+\\
&\qquad+(A_{2n}+\Delta_{2n})\frac{d\log s_1}{dx_2}+\ldots\ldots+A_{nn}\frac{d\log s_1}{dx_n}
\end{aligned}\right.
$$

A estas n ecuaciones, del primer grado con respecto a los cocientes diferenciales $\frac{d\log s_1}{dx_i}$, puede satisfacerse por valores de estos que no son iguales a cero en su totalidad, en caso de que la determinante de este sistema es diferente de cero, o bien en caso de que

$$
\Delta=\begin{vmatrix}
A_{11} & A_{21}+\Delta_{21} & \ldots\ldots & A_{n1}+\Delta_{n1}\\
A_{12}+\Delta_{12} & A_{22} & \ldots\ldots & A_{n2}+\Delta_{n2}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
A_{1n}+\Delta_{1n} & A_{2n}+\Delta_{2n} & \ldots\ldots & A_{nn}
\end{vmatrix}\gtrless 0.
$$

Bajo la suposicion de que $\Delta\gtrless 0$, la solucion del sistema es la siguiente:

$$
26.^{\circ}\quad \frac{d\log s_1}{dx_1}=\frac{a_1}{A_{11}},\quad \frac{d\log s_1}{dx_2}=\frac{d\log s_1}{dx_3}=\ldots=\frac{d\log s_1}{dx_n}=0.
$$

El sistema 26.° es equivalente al 25.° Réstanos averiguar si el sistema 26.° admite una solucion comun. Sea

$$
\log s_1=f(x_1, x_2, \ldots x_n).
$$

esta solucion. En este caso tendríamos:

$$\frac{df}{dx_1} \equiv \frac{a_1}{A_{11}}, \quad \frac{df}{dx_2} \equiv \frac{df}{dx_3} \equiv \ldots \equiv \frac{df}{dx_n} \equiv 0.$$

De estas n identidades deducimos las $n-1$ siguientes

$$\frac{d\dfrac{a_1}{A_{11}}}{dx_i} \equiv 0, \qquad i=2, 3, \ldots n$$

i éstas solo pueden subsistir en el caso especial de que $\frac{a_1}{A_{11}}$ fuera una funcion de x_1 e independiente de las demas variables. Como este resultado no se califica como una consecuencia necesaria de las condiciones arriba establecidas a las que los coeficientes de la ecuacion propuesta han de obedecer, es evidente que, bajo la condicion $\Delta \gtreqless 0$, no existe una solucion comun del sistema 25.º sino en el caso excepcional de que los coeficientes a_1 i A_{11} tengan, la forma

$$a_1 = f(x_1).\ \phi(x_2, x_3, \ldots x_n)$$
$$A_{11} = F(x_1).\ \phi(x_2, x_3, \ldots x_n).$$

Consideremos ahora el caso $\Delta = 0$. Definiendo las cantidades p_i por las identidades

$$p_i \equiv \frac{d \log s_1}{dx_i}$$

i designando las n ecuaciones del sistema 25.º respectivamente por $e_1, e_2, \ldots e_n$, resulta que la determinante $\Delta = 0$ es equivalente a la llamada funcional

$$0 = \Sigma \pm \frac{de_1}{dp_1}, \frac{de_2}{dp_2}, \ldots \frac{de_n}{dp_n}$$

Luego. si $\Delta = 0$, las ecuaciones del sistema 25.º no son independientes unas de otras i éste se reduce a un sistema de $n-1$ ecuaciones, si no fuera que todas las subdeterminantes del primer órden, $\frac{d\Delta}{d(A_{ki} + \Delta_{ki})}$, son iguales a cero.

Para entrar a analizar este caso, supongamos que la última ecuacion del sistema 25.° sea una consecuencia aljebráica de las $n-1$ que preceden, de modo qne esta última puede suprimirse sin perjuicio a la jeneralidad del sistema. Pasando los términos que contienen $\frac{d\ log\ s_1}{dxn}$ al primer miembro, el sistema 25.° se convierte en el siguiente:

$$27.^{\circ} \qquad \sum_{h=1}^{h=n-1}(A_{hi}+\Delta_{hi})\frac{d\log s_1}{dx_h}=c_i\,,$$

siendo

$$c_i=\frac{a_1}{A_{11}}(A_{1i}+\Delta_{1i})-(A_{ni}+\Delta_{ni})\frac{d\log s_1}{dx_n}$$

Supongamos ademas que, si algunas de las subdeterminantes $\frac{d\Delta}{d(A_{ki}+\Delta_{ki})}$ fueran iguales a cero, no lo sea la $\frac{d\Delta}{dA_{nn}}=D$ que es la determinante del sistema 27.° En este caso, las $n-1$ ecuaciones que componen nuestro sistema, son independientes unas de otras con respecto a los cocientes diferenciales $\frac{d\log s_1}{dx_1}$, $\frac{d\log s_1}{dx_2}$, ... $\frac{d\log s_1}{dx_n}$, i de consiguiente estos cocientes pueden despejarse en funcion de $\frac{d\log s_1}{dx_n}$. Efectuando esta operacion, el sistema 27.° toma la forma siguiente:

$$28. \qquad \frac{d\log s_1}{dx_i}=\frac{D(A_{ik}+\Delta_{ik}/c_k)}{D}$$

A los índices i *y* *k* puede atribuírseles cada uno de los valores 1, 2, ... $n-1$, i el símbolo $D\ (A_{ik}+\Delta_{ik}/c_k)$ significa que, para formar el numerador de estas fracciones, debe sustituirse cada $A_{ik}+\Delta_{ik}$ de la determinante D por c_k. Las ecuaciones 28.° son susceptibles de algunas trasformaciones que vamos a ejecutar. Desarrollando el numerador de 28.° tenemos:

$$D.\frac{d\log s_1}{dx_i}=\frac{a_1}{A_{11}}\sum_{k=1}^{k=n-1}(A_{1k}+\Delta_{1k})\frac{dD}{d(A_{ik}+\Delta_{ik})}$$
$$-\frac{d\log s_1}{dx_n}\sum_{k=1}^{k=n-1}(A_{nk}+\Delta_{nk})\frac{dD}{d(A_{ik}+\Delta_{ik})}$$

Ahora bien, sí, en una determinante, todos los términos de una columna se multiplican por las sub-determinantes correspondientes a los términos de otra columna de la misma determinante, la suma de estos productos será igual a cero. En virtud de este teorema, el primer término de nuestro desarrollo desaparece, i tenemos

$$D.\frac{d \log s_1}{d\, o_i} = -\frac{d \log s_1}{d\, o_n} \sum_{k=1}^{k=n-1} (A_{nk}+\Delta_{nk}) \frac{d D}{d(A_{ik}+\Delta_{ik})}$$

Ahora bien, segun el mismo teorema, es evidente que

$$0 \equiv \sum_{k=1}^{k=n-1} (A_{nk}+\Delta_{nk}) \frac{d \Delta}{d(A_{ik}+\Delta_{ik})} + A_{nn} \frac{d \Delta}{d A_{in}}$$

Diferenciando esta identidad con respecto a A_{nn}, tenemos

$$0 \equiv \sum_{k=1}^{k=n-1} (A_{nk}+\Delta_{nk}) \frac{d^2 \Delta}{d A_{nn}\, d(A_{ik}+\Delta_{ik})} + \frac{d \Delta}{d A_{in}}$$

i como

$$\frac{d^2 \Delta}{d A_{nn}\, d(A_{ik}+\Delta_{ik})} \equiv \frac{d D}{d(A_{ik}+\Delta_{ik})}$$

de manera que el sistema 28.º tiene la forma:

$$29.^o \quad \frac{d \log s_1}{d x_i} = \frac{1}{D} \cdot \frac{d \Delta}{d A_{in}} \cdot \frac{d \log s_1}{d x_n} .$$

i designando, finalmente, los cocientes diferenciales $\frac{d \log s_1}{d x_i}$ por p_i i $\frac{1}{D} \cdot \frac{d \Delta}{d A_{in}}$ por F_i, este sistema se reduce a la forma

$$30.^o \quad p_i = p_n \, . \, F$$

Ahora bien, si tenemos las dos ecuaciones diferenciales parciales del primer órden

$$a.)\ F(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0$$
$$b.)\ \phi(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0$$

toda solucion de la ecuacion $a.$) satisface al mismo tiempo tambien a las n ecuaciones

$$\frac{dF}{dx_h}+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{dF}{dp_i}\cdot\frac{dp_i}{dx_h}=0$$

que resultan de la $a.$) por medio de la diferenciacion de aquella con respecto a las variables x_h. Multiplicando la ecuacion anterior por $\frac{d\Phi}{dp_h}$ i sumando con respecto al índice h, se deduce que toda solucion de la ecuacion $a.$) satisface al mismo tiempo a la siguiente:

$$c.)\sum_{h=1}^{h=n}\frac{dF}{dx_h}\cdot\frac{d\Phi}{dp_h}+\sum_{h=1}^{h=n}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{dF}{dp_i}\frac{d\Phi}{dp_h}\cdot\frac{dp_i}{dx_h}=0$$

Para que la solucion de $a.$) sea tambien una solucion de $b.$), es necesario que satisfaga, ademas de satisfacer a $c.$), tambien a la ecuacion que resulta de $c.$) cambiando F por ϕ, o sea a la siguiente:

$$d.)\sum_{h=1}^{h=n}\frac{d\Phi}{dx_h}\cdot\frac{dF}{dp_h}+\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{dF}{dp_i}\frac{d\Phi}{dp_h}\cdot\frac{dp_h}{dx_i}=0$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{dp_h}{dx_i}=\frac{dp_i}{dx_h}$$

i escribiendo abreviadamente

$$(F,\Phi)=\sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{dF}{dx_h}\cdot\frac{d\Phi}{dp_h}-\frac{dF}{dp_h}\cdot\frac{d\Phi}{dx_h}\right),$$

resulta de las consideraciones anteriores, si se resta la ecuacion $d.$) de la $c.$), que toda solucion comun de las ecuaciones diferenciales $a.$) i $b.$) debe satisfacer tambien a la ecuacion:

$$e.)\quad (F,\phi)=0.$$

Las consideraciones anteriores se estienden fácilmente al caso de que el sistema *a.*), *b.*) conste de un número mayor de ecuaciones. Dando, especialmente, al sistema propuesto la forma

$$g.)\quad p_1 = f_1, p_2 = f_2, \ldots \quad p_m = f_m,$$

sistema en que $m < n$ i las cantidades $f_1, f_2, \ldots f_m$ no son funciones mas que de $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n$, tenemos que el sistema *g.*) solo admite una solucion comun en caso de que ésta satisfaga a las ecuaciones:

$$h.)\ (f - p_i, f_k - p_k) = 0$$

i como las cantidades f son independientes de $p_1, p_2, \ldots p^m$, se nota que estas ecuaciones toman la forma:

$$i.)\ \frac{df_k}{dx_i} - \frac{df_i}{dx_k} + \sum_{h=m+1}^{h=n} \left(\frac{df_i}{dx_h} \cdot \frac{df_k}{dp_h} - \frac{df_i}{dp_h} \cdot \frac{df_k}{dx_h} \right) = 0$$

En nuestro caso, tenemos

$$f_i = p_n \cdot F_i \quad \text{i} \quad m = n - 1,$$

de modo que, para nuestro sistema 30.°, las ecuaciones *i.*) tienen la forma siguiente:

$$31.°\ p_n \left(\frac{dF_k}{dx_i} - \frac{dF_i}{dx_k} + F_k \frac{dF_i}{dx_n} - F_i \frac{dF_k}{dx_n} \right) = 0$$

Estas ecuaciones se satisfacen suponiendo $p_n = 0$.

Pero esta suposicion traeria por consecuencia que tambien

$$p_1 = p_2 \ldots = p_{n-1} = 0,$$

o sea

$$s_1 = \text{const.} = 0,$$

lo que no puede admitirse.

Por esto, para que la solucion comun del sistema 29.° pueda satisfacer tambien a las ecuaciones signadas por el núm. 31.°, es necesario que entre los coeficientes del sistema propuesto tengan lugar las condiciones

$$32.°\ \frac{dF_k}{dx_i} - \frac{dF_i}{dx_k} + F_k \frac{dF_i}{dx_n} - F_i \frac{dF_k}{dx_n} \equiv 0 \equiv (F_i, F_k).$$

Como estas condiciones se llenan idénticamente, si $k=i$, como k e i pueden tomar cada uno de los valores 1, 2, ... $n-1$, i como, ademas, k e i pueden cambiarse uno por otro, las condiciones $(F_i, F_k)\equiv 0$ son de número $\frac{n(n-3)}{2}$. Tampoco es posible que todas las condiciones $(F_i, F_k)\equiv 0$ sean consecuencias aljebráicas de las $C_{ki}\equiv 0$, pues las $(F_i, F_k)\equiv 0$ son independientes de a_i i de A_{nn}. Eliminando, en las condiciones $C_{ki}\equiv 0$, las $n+1$ cantidades a_i i A_{nn}, resultarian no mas que $\frac{n(n-3)}{2}-1$ condiciones.

De lo anteriormente espuesto deducimos el teorema:

"*Para que las* n *ecuaciones diferenciales*

$$\frac{a_1}{A_{11}}(A_{1i}+\Delta_{1i})=\sum_{h=1}^{h=n}(A_{hi}+\Delta_{hi})\,\frac{d\log s_1}{dx_h}$$

admitan una solucion comun, es necesario que la determinante funcional

$$\Delta\equiv\Sigma\pm\frac{de_1}{dp_1},\ \frac{de_2}{dp_2},\ \ldots\ldots\ \frac{de_n}{dp_n}$$

desaparezca, i que, bajo la condicion de que

$$\frac{d\Delta}{dA_{nn}}\gtreqless 0,$$

los coeficientes A_{ih} *del sistema propuesto satisfagan a las* $\frac{n(n-3)}{2}$ *condiciones:*

$$\frac{dF_k}{dx_i}-\frac{dF_i}{dx_k}+F_k\frac{dF_i}{dx_n}-F_i\frac{dF_k}{dx_n}\equiv 0\ "$$

En caso de que todas las subdeterminantes del primer órden fueran iguales a cero, resultaria que el sistema 25.° se redujera a un número inferior a $n-1$ ecuaciones, i el procedimiento para averiguar en este caso las condiciones de la solucion comun, seria análogo al que acabamos de esponer.

IV

En el primer capítulo hemos demostrado que la ecuacion diferencial propuesta es equivalente a un sistema de la forma indicada por el núm. 2.º, si los coeficientes A_{hi} i a de aquella satisfacen a las $\frac{n(n-1)}{2}$ condiciones $C_{ki}\equiv 0$. En lo sucesivo trataremos de averiguar si esta equivalencia puede tener lugar tambien en caso de que los coeficientes de la ecuacion 1.ª no satisfagan a todas estas condiciones. Veremos que, en este caso, la ecuacion propuesta puede ser transformada en otra, cuyos coeficientes llenen las condiciones análogas a las $C_{ki}\equiv 0$.

Para esta trasformacion nos ha de servir una sustitucion de la forma

$$V=f(U),$$

siendo f una funcion cualquiera de la nueva variable dependiente U. Para averiguar cuál ha de ser la forma de $f(U)$, es preciso notar que, por medio de la sustitucion indicada, los cocientes diferenciales de V con respecto a x_h, se convierten en las espresiones siguientes:

$$\frac{dV}{dx_h}=\frac{df}{dU}\cdot\frac{dU}{dx_h}$$

$$\frac{d^2V}{dx_h\,dx_i}=\frac{df}{dU}\cdot\frac{d^2U}{dx_h dx_i}+\frac{d^2f}{dU^3}\cdot\frac{dU}{dx_h}\cdot\frac{dU}{dx_i}$$

Segun esto, la ecuacion trasformada seria del segundo grado, si no se llenara la condicion:

$$\frac{d^2f}{d\,U^2}\equiv 0.$$

Pero esta condicion exije que

$$f(U)=A.U+B$$

o mas bien:

$$f(U)=A.U,$$

siendo A una funcion de $x_1, x_2, \ldots . x_n$, cuyo valor se determinará de la manera siguiente. Tenemos:

$$\frac{dV}{dx_h}=A.\frac{dU}{dx_h}+U.\frac{dA}{dx_h}$$

i

$$\frac{d^2 V}{dx_h\, dx_i} = A . \frac{d^2 U}{dx_h\, dx_i} + \frac{d\, U}{d\, x_h} \cdot \frac{d\, A}{d\, x_i} + \frac{d A}{d\, x_h} \cdot \frac{d\, U}{d\, x_i}$$

$$+ U \frac{d^2 A}{d\, x_h\, d\, x}$$

Reemplazando, en la ecuacion 1.ª, los cocientes $\frac{d\, V}{d\, x_h}$ i $\frac{d^2\, V}{d\, x_h\, d\, x_i}$ por sus valores, la ecuacion 1.ª se convierte en la otra:

$$33. \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} A_{hi} \left(A \frac{d^2 U}{dx_h dx_i} + \frac{dU}{dx_h} . \frac{dA}{dx_i} + \frac{dA}{dx_h} \frac{dU}{dx} + U \frac{d^2 A}{dx_h\, dx_i} \right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=n} a_h \left(A \frac{dU}{dx_k} + U \frac{dA}{dx_k} \right) = A\, U b_1 + b_2$$

ó bien:

$$35.^{\circ} \quad \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \Gamma_{hi} \frac{d^2 U}{dx_h\, dx_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \gamma_k \frac{dU}{dx_k} = \beta_1 U + \beta_2$$

Los coeficientes de la ecuacion 34.ª i de la 1.ª se relacionan por las ecuaciones siguientes:

$$35.^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{hi} = A .\, A_{hi} \\ \gamma_k = 2 \sum_{h=1}^{h=n} A_{hk} \frac{dA}{dx_h} + A .\, a_k \\ \beta_1 = A \beta_1 - \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} A_{hi} \frac{d^2 A}{dx_h\, dx_i} - \sum_{k=1}^{k=n} a_k \frac{dA}{dx_k} \\ \beta_2 = b_2 \end{array} \right.$$

Ademas se nota que

$$36.^{\circ} \quad \delta_{hi} = \pm \sqrt{\Gamma_{hi} - \Gamma_{ii}\, \Gamma_{hh}} = A .\, \Delta_{hi}$$

Así como, en el primer capítulo, todos los cálculos se hicieron bajo la suposicion de que $A_{11} \gtrless 0$, será necesario admitir tambien ahora la condicion

$$\Gamma_{11} \gtrless 0.$$

Ahora bien, para que la ecuacion 34.ª sea equivalente a un sistema de la forma 2.ª, es necesario que sus coeficientes llenen las $\frac{n(n-1)}{2}$ condiciones:

$$E_{ki} \equiv \sum_{h=1}^{h=n} (\Gamma_{hi}+\delta_{hi}) \frac{d\frac{\Gamma_{ki}+\delta_{ki}}{\Gamma_{ii}}}{dx_h} - \left(\gamma_k - \frac{\Gamma_{ki}+\delta_{ki}}{\Gamma_{ii}}\gamma_i\right) \equiv 0$$

o reemplazando los nuevos coeficientes por los de la ecuacion primera:

$$A.\sum_{h=1}^{h=n} (A_{hi}+\Delta_{hi}) \frac{d\frac{A_{ki}+\Delta_{ki}}{A_{ii}}}{d\,x_h} \left\{ 2\sum_{h=1}^{h=n} A_{hk}\frac{d\,A}{d\,x_h} + A a_k \right.$$

$$\left. - \frac{A_{ki}+\Delta_{ki}}{A_{ii}} \left(2\sum_{h=1}^{h=n} A_{hi}\frac{dA}{dx_h} + A a_i \right) \right\} \equiv 0$$

condiciones que, despues de la debida reduccion, toman la forma siguiente:

$$36.^{\circ} \quad A\,C_{ki} - 2\sum_{h=1}^{h=n} \left(A_{hk} - \frac{A_{ki}+\Delta_{ki}}{A_{ii}} A_{hi} \right) \frac{dA}{dx_h} = 0.$$

Desde luego es evidente que 36.º representa un sistema de $\frac{n(n-1)}{2}$ ecuaciones diferenciales del primer órden i primer grado para la funcion A, puesto que 36.º se convierte en identidad en el caso de que $k=i$. Ademas, si todas las cantidades Δ_{ki} obedecieran a las condiciones

$$\Delta_{ki} \equiv 0$$

o bien

$$A_{ki} \equiv \sqrt{A_{ii}\,A_{kk}}$$

los coeficientes de todos los cocientes diferenciales $\frac{d\,A}{dx_h}$ desaparecerian, i las ecuaciones 36.º se reducirian a las siguientes:

$$A.C_{ki} = 0,$$

resultado que dice, que si 34.º es o no equivalente a un sistema de la forma 2.ª, lo es al mismo tiempo la ecuacion 1.ª o no lo es, i recíprocamente.

Para tratar del caso jeneral, notamos que A se define como solucion comun de las $\frac{n(n-1)}{2}$ ecuaciones diferenciales parciales 36.º Ahora, jeneralmente, se tiene:

$$\frac{n(n-1)}{2} > n$$

Pero, el problema de encontrar una solucion comun del sistema 36.º exije que

$$\frac{n(n-1)}{2} \leqq n,$$

de donde se deduce:

$$n \leqq 3.$$

Si $n > 3$, las cantidades $\frac{d \log A}{dx^h}$ pueden ser eliminadas en el sistema 36.º, i resultan $\frac{n(n-3)}{2}$ nuevas condiciones entre los coeficientes de la ecuacion 1.ª Tenemos, por esto, el teorema:

"*Para que una ecuacion diferencial del segundo órden i del primer grado pueda reducirse, por medio de la sustitucion* V = A.U, *a otra ecuacion diferencial de la misma naturaleza i que sea equivalente a un sistema de la forma signada por el núm.* 2.º, *es necesario que entre los coeficientes de la ecuacion propuesta existan, cuando ménos,* $\frac{n(n-3)}{2}$ *condiciones.*"

Despues de llevar a cabo la esposicion que nos hemos propuesto al terminar nuestra introduccion, será cuestion de un trabajo separado el examinar las propiedades de un sistema de la forma signada por el núm. 2.º i las facilidades que ofrece para la resolucion de las ecuaciones diferenciales parciales del segundo órden i del primer grado.

DR. RICARDO POENISCH
Profesor del Instituto Nacional

DON JUAN SCHULTZ