MEMORIAS CIENTÍFICAS I LITERARIAS

FÍSICA I QUÍMICA. El espectro solar, la escala musical i el metro.—Memoria presentada el 20 de junio de 1884 a la Facultad de matemáticas por el injeniero de minas de la escuela de minería de Paris don Cárlos Plisson.

PRÓLOGO

La cuestion que forma la materia de esta memoria se presentó incidentalmente en el curso de largos trabajos sobre la cristalografía; pero la idea de publicar aisladamente estos resultados parciales obtenidos hace algunos años me fué sujerida por el deseo de corresponder a la invitacion que recibí de cooperar en algo a la solemnizacion de la fiesta nacional francesa.

Dejando a un lado lo que se relaciona con la parte puramente política de ese colosal asentimiento que se llama sencillamente la «Revolucion», me limito a señalar las ventajas indiscutibles que ha reportado la introduccion del sistema métrico.

La unificacion de las medidas no tenia por único motivo la conveniencia de facilitar las transacciones de la vida social; es indudable que en la mente de los iniciadores de ésta i de tantas otras benéficas reformas, ella era el primer paso hácia lo que, prematuramente, se llamó la fraternidad humana. Pero si la intencion era buena ¿lo fué en igual grado la ejecucion?

El actual trabajo dará la contestacion.

Esta publicacion debia, en el principio, preceder a la solemnidad del 14; pero motivos de salud por una parte i por otra la necesidad de rehacer la memoria primitiva redactada en frances, han sido la causa de este lijero atraso, i como no quiero que se dé, al hecho de presentar un trabajo escrito en frances una interpretacion errónea, me creo precisado a añadir una última esplicacion. Habiendo, hace algunos años, presentado a la Facultad de Ciencias un trabajo matemático, redactado naturalmente en castellano, don Ignacio Domeyko me dijo, espresamente, que para esta clase de asuntos era preferible emplear el idioma frances a fin de tener mayor número de lectores, porque todas las personas versadas en las ciencias, entienden el frances i todas las que se ocupan de ciencias no entienden el castellano. Así, pues, al redactar en frances la primitiva memoria, no he hecho mas que conformarme al dictámen de la persona mas autorizada en otros tiempos. No adolezco de la enfermedad llamada Chauvinismo, ni creo necesario acudir a semejantes medidas para enaltecer las glorias de mi patria.

COLORES DEL ESPECTRO SOLAR.—LONJITUD DE ONDAS

En todos los tratados de física se halla la lista de los colores del espectro solar con la lonjitud de ondas correspondiente.

La que viene a continuacion ha sido sacada de «L'annuaire du cosmos, I annèe».

«Longueurs d'ondes dansl'air en millioniemes de milímetre, des divers rayons colorés du Spectre Solaire».

COLORES	LONJITUD DE ONDAS	LOGARITMOS
Violet-límite	406	6,608226
Violet	423	6,626340
Violet-indigo	439	6,642464
Indigo	449	6,652345
Indigo-bleu	459	6,661813
Bleu	475	6,676694
Bleu-vert	492	6,691965
Vert	511	6,708021
Vert-jaune	532	6,725912
Jaune	551	6,741152
Jaune-orangé	571	6,756636
Orangé	583	6,765,669
Orangé-rouge	596	6,775,246
Rouge	620	6,792392
Rouge-límite	645	6,809560

Dispongamos estas cifras segun el órden siguiente:

NOMBRES	LOGARITMOS	COCIENTES	PRODUCTOS
Rojo-límite............	6,809560		
Morado-límite.........	6,608226	4,201334	3,417786
Rojo....................	6,792392		
Morado..................	6,626340	0,166052	3,418733
Rojo-anaranjado......	6,775246		
Morado-indigo.........	6,642464	0,132782	3,417718
Anaranjado............	6,765669		
Indigo..................	6,652246	0,113423	3,417915
Anaranjado-amarillo..	6,756636		
Indigo-azul............	6,661813	0,094828	3,418449
Amarillo................	6,741152		
Azul.....................	6,676694	0,065458	3,417846
Amarillo-verde.........	6,725912		
Azul-verde.............	6,691965	0,033947	3,317877
Verde....................	6,708422		
Verde....................	6,708422		3,416841

La simple vista indica que cada par de colores, a igual distancia del color central, verde, da un producto constante que es el cuadrado del valor de la lonjitud de onda del color central.

Llamaré provisoriamente correlativos los colores que forman un par i dan el producto constante.

Sea λ_0 la raiz cuadrada de este producto constante igual a la lonjitud de onda del verde.

La propiedad arriba mencionada, nos proporciona la espresion aljebraica

$$\lambda = \lambda_0 \ k$$

por el valor de una lonjitud de onda cualquiera i

$$\gamma=\lambda'_0\frac{1}{k}$$

por el valor de la lonjitud de onda del color correlativo.

En la tabla precedente los cocientes son los cuadrados de los coeficientes k.

Por medio de una mui lijera modificacion la raiz cuadrada del producto constante se puede escribir 512 en lugar de 511 i efectivamente otras obras, por ejemplo el tratado de Lamé (1) asigna este valor 512 en lugar de 511 a la raiz del producto constante cuyo logaritmo es 6.709,270 i que representa una 3.ª potencia.

$$(0{,}0008,)^3$$

En tal caso los cocientes pueden tambien por analojía ser considerados como terceras potencias, o mejor dicho como sestas potencias.

Lonjitud deenda del límite colorado $=$ 0,201334
Lonjitud deenda del límite morado $\sqrt{\ }$. 0,100667
$\sqrt[3]{\ }$ 0,033556

pues bien $0{,}033424=\lg.\ \frac{27}{25}$

Valor que, como mas tarde se verá, desempeña un papel importante en la economía numérica de la naturaleza.

Pero los demas cocientes sometidos al mismo tratamiento no arrojan resultado ninguno que se pueda interpretar de un modo satisfactorio. Al notar esta circunstancia, mi solo objeto es llamar la atencion sobre lo peligroso que es el dar por base a sus inducciones un número insuficiente de datos.

Mucho tiempo me ha costado el olvido de esta máxima, hasta que al fin cansado de sacar de valde raices terceras i sestas me resolví a dar otro jiro a estas investigaciones, principiando por el estudio de las ondas sonoras.

---

(1) Cours de phisique de l'écale polythecnique pàr Lamé.

LAS ONDAS SONORAS COMPARADAS CON LAS ONDAS LUMINOSAS

En el mismo «Annuaire du Cosmes 1.er année» se halla la tabla siguiente:

«Octave medium du violon on de la voix humaine.

«Longueur d'andes des sons de la serie des tons musicaux».

INTERVALOS	NOTAS	LONJITUD DE ONDAS	LOGARITMOS	LOGARITMOS MODIFICADOS
		m.		
1	ut_3	0,6585	9,818556	9,709270
24/25	ut*	0,6322	9,800827	9,691541
25/27	re b.	0,6098	9,785132	9,675846
8/9	re	0,5854	9,767400	9,658104
64/75	re*	0,5620	9,749674	9,640388
5/6	mi b.	0,5488	9,739357	9,630089
4/5	mi	0,5268	9,721646	9,612360
96/125	mi*	0,5058	9,703917	9,594631
25/32	fa b.	0,5145	9,711346	9,602060
3/4	fa	0,4939	9,693917	9,584331
18/25	fa*	0,4741	9,675888	9,566602
25/36	sol b.	0,4573	9,660194	9,550908
2/3	sol	0,4395	9,642465	9,533179
16/25	sol*	0,4215	9,624736	9,515450
5/8	la b.	0,4116	9,614436	9,505150
3/5	la	0,3951	9,596707	9,487421
72/125	la*	0,3793	9,578978	9,469692
5/9	si b.	0,3658	9,563284	9,453998
8/15	si	0,3512	9,545555	9,436269
64/125	si*	0,3372	9,527826	9,418540
25/48	ut b.	0,3431	9,535255	9,425969
1/2	ut_4	0,3292	9,517526	9,408240

CORRELACION ENTRE LOS VALORES QUE ESPRESAN LA LONJITUD DE LAS ONDAS SONORAS

Disponiendo los números de la tabla precedente del mismo modo que ántes con respecto a las ondas luminosas vemos reaparecer el producto constante, cuya raiz cuadrada indica una nota comprendida entre fa* i sol b.

NOTAS	LOGARITMOS	PRODUCTO	PR. MODIFICADO
fa*	9,675888		9,566602
sol b.	9,690194	9,336082	9,851938
			9,418540
fa	9,693617		9,584381
sol	9,642465	9,336082	9,834209
			9,418540
fa b.	9,711346		9,602060
sol*	9,624736	9,336082	9,816480
			9,418540
mi	9,721646		9,612360
fa b.	9,614436	9,336082	9,806180
			9,418540
mi b.	9,739375		9,630089
la	9,596707	9,336082	9,788451
			9,418540
ut_3*	9,800827		9,647818
ut_4 b.	9,725265	9,336082	9,770722
			9,418544
ut_3	9,818556		
ut_4	9,517526	9,336082	

Para estrechar mas la analojía que existe entre las dos clases de ondas i facilitar la comparacion, vamos a ejecutar una operacion que los músicos llaman *transportar* (en frances, transposer), la que consiste en cambiar el sonido fundamental.

Adoptaremos por fundamental el sonido que tiene por lonjitud de onda el número 0,^{m}512 lg. 9,709270. (Ver las tablas péjs. 196 i 199) de este modo conseguimos un producto constante 9.418540 igual, en cuanto a la parte decimal, al de las ondas sonoras *se vé tambien que las notas correlativas no pertenecen a la misma escala,* entre ellas existe el intervalo de una octava. Esta observacion encontrará una interpretacion interesante mas tarde.

Para que la analojía entre ámbas clases de ondas sea completa falta uniformar las características, cosa mui fácil, puesto que basta cambiar la unidad con que van espresadas las ondas luminosas. En lugar del milímetro que en realidad es un *grandor* excesivo, comparado con el diminuto tamaño de la cosa que se mide, adoptaremos el milímetro de milímetro, que, (para abreviar), podemos lamar *micrómetro* i así espresaremos λ_0 del mismo modo; ámbas tendrán el mismo logaritmo.

$$9{,}709270$$

Pero será necesario tener presente que las características representan dos unidades que difieren una de otra por la cantidad

$$10^6$$

APARENTE ANOMALIA QUE OFRECE LA ESCALA CROMÁTICA DE LOS SONIDOS

Antes de seguir mas adelante en esta esposicion, conviene desvanecer la anomalía que a primera vista ofrece la escala musical: de las 22 notas solo 14 aparentan conformarse con la regla del producto constante, la 3.ª parte hace escepcion; i la dificultad desaparece con la introduccion de una nueva base o sea producto comun.

$$\begin{array}{lr} Ut_3 & 9{,}709270 \\ Si_2 & 9{,}737299 \\ \hline & 9{,}446569 \end{array}$$

Las *notas* siguientes obedecen a esta nueva condicion:

$$\begin{array}{l} Ut_3{}^* \; ; \; re_3\,b. \; ; \; r_3e \; ; \; re_3\,b. \; ; \; mi\,b. \; ; \; mi \; ; \; mi^* \\ Si_2\,b \; ; \; la_2{}^* \; ; \; la_2 \; ; \; la_2\,b. \; ; \; sol_2{}^* \; ; \; sol_2 \; ; \; sol_2\,b. \end{array}$$

La esplicacion de este hecho (cambio de producto) es mui sencilla:

Los dos productos corresponden a los 2 *modos* de la música.

El producto 9,418540 pertenece al «modo menor».

El producto 9,446569 pertenece al «modo mayor».

ANILLOS COLORADOS DE NEWTON

En la fórmula $l=lo\,k$ que espresa una lonjitud de onda sonora, conocemos la base $lo=0.^m512$ i el coeficiente k, coeficiente *armónico*, que se compone de los factores $(\frac{2}{3})^x(\frac{3}{5})^y$ i de un coeficiente 2^z, así pues en dicho formula todo esto conocido; no así en la espresion *homóloga*.

$$\lambda=\lambda_0\ x$$

de una onda luminosa; aquí falta determinar el valor de x.

Un hermoso esperimento de óptica que lleva el nombre de su autor, Newton, nos proporcionará la solucion del problema.

Sin entrar en los pormenores del esperimento tan conocido, me limitaré a reproducir los datos numéricos i, para mayor exactitud, doi a continuacion un estracto del tratado de física de Peclet:

(1) « Newton a reconnu, par des expériences nombreuses, que les » diamètres des anneaux de même rang formés avec les différents » rayons correspondants aux limites des sept couleurs qu'il avait » distinguées dans le spectre étaient entre eux comme les racines » cubiques des nombres

$$1, \frac{8}{9}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{9}{16}, \frac{1}{2};$$

» alors les épaisseurs des lames d'air correspondantes, étant pro- » portionnelles aux carrés des diamètres, sont entre elles comme » les carrés de ces racines cubiques.

---

(1) Triaté élémentaire de Physique par Péclet, 3er édition, p. 398.

» Le tableau suivant donne le résultat de ces calculs:

Désignation des couleurs.	Epaisseur de la lame d'air au périmètre intérieur du premier anneau.
» Rouge extrême....................	*e* . ...
» Limite du rouge et de l'orangé......	*e* . 0,9248
» Limite de l'orangé et du jaune......	*e* . 0,8855
» Limite de jaune et du vert...........	*e* . 0,8255
» Limite du vert et du bleu.............	*e* . 0,7635
» Limite du bleu et de l'indigo	*e* . 0,7114
» Limite de l'indigo et du violet......	*e* . 0,6814
» Violet extrême..........................	*e* . 0,6307

« Pour l'air, la valeur de *e* estimée en millonièmes de pouces » anglais est 3,172206; et, comme le pouce anglais vaut 25^{mm}, » 39954, cette valeur de *e* en millimètres est 0^{mm},00008058».

SOLUCION

Los datos sobran; el espesor *e* siendo la octava parte de la lonjitud de onda del límite rojo sentaremos

$$\lambda_r \text{ (límite rojo)} = \lambda_0 \ x_x = e \times 8$$

Pero ántes de seguir mas adelante, conviene, para ahorrar tiempo, adoptar signos que indiquen con toda claridad las diferentes lonjitudes de ondas. Es fácil conseguir un resultado satisfactorio por medio de indicios numéricos que espresen el rango del color i de puntos diacríticos, del modo siguiente:

$\dot{\lambda}_1$ = amarillo verde ; $\dot{\lambda}_7$ límite rojo
$\underset{\cdot}{\lambda}_1$ = azul verde $\quad$ $\underset{\cdot}{\lambda}_7$ límite morado
& & &

CÁLCULOS

Esto sentado pasamos al cálculo de la lonjitud de ondas de los colores que espresa la lista anterior.

$$\lg.\ \lambda_7 = \lg.\ 8\,e = \lg.(\lambda_0\ x_7)$$

$$\begin{array}{lrl}
 & \lg.\ e\ = & 5{,}906173 \\
 & \lg.\ 8.\ = & 0.903090 \\
 & \lg.\ \dot{\lambda}_7\ = & 6{,}809263 \\
\text{con la nueva unidad} & & 3{,}000000 \\
\hline
 & & 9{,}809263 \\
 & \lg.\ \lambda_0 & 9{,}709270 \\
\hline
 & \lg.\ x_7 = & 0{,}099993
\end{array}$$

Pero por otra parte tenemos $\dfrac{\lambda_7}{\dot{\lambda}_7} = 0{,}6300$

i segun hemos reconocido anteriormente este valor 0,6300 es el cuadrado del coeficiente

$$\left(\frac{1}{x_7}\right) \qquad \text{puesto que} \quad \lambda_7 = \lambda_0 \left(\frac{1}{x_7}\right)$$
$$\dot{\gamma} = \lambda_0 \quad x_7\ .$$

$$\begin{array}{lr}
\text{Pues bien } \lg.\ 0{,}6300 = & 9{,}799340 \\
 & \checkmark.\ 9{,}899670 \\
\text{Pero} & 9{,}899670 = \lg.\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} \\
\hline
 & 0{,}000014
\end{array}$$

La diferencia entre estos dos logaritmos es tan ínfima que no influye sobre el valor 0,6300 de un modo apreciable, podemos pues admitir:

$$\dot{x}_7 = \sqrt[3]{2} \qquad \text{i}$$
$$\dot{\lambda}_7 = \lambda_0 \sqrt[3]{2}$$
$$\lambda_7 = \lambda_0 \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

$$\begin{array}{lr}
 & 9{,}709270 \\
 & 0{,}100344 \\
\hline
\lg.\ 8e & 9{,}809614
\end{array}$$

Límite colorado anaranjado $\dot{\lambda}_5$ $e \times 0{,}9248$ lg. 9,966047
Límite indigo morado $\underset{\cdot}{\lambda}_5$ $e \times 0{,}6814$ lg. 9,833402

Costa uno de esos 2 valores *correlativos*

$$
\begin{array}{rr}
\text{sea} & 9{,}833402 \\
\lg.\ 8\,e = \lg.\ \underset{\cdot}{\lambda}_7 & 9{,}809614 \\
\hline
 & 9{,}643016 \\
\lg.\ \lambda_0 & 9{,}709270 \\
\hline
 & 9{,}933746
\end{array}
$$

Pues bien $9{,}933749 = \lg.\ \sqrt[3]{\frac{81}{128}}$

luego $\dot{\lambda}_5 = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{128}{81}}$ i $\underset{\cdot}{\lambda}_5 = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{81}{128}}$

$\dot{\lambda}_3 = e \times 0{,}8855$

$$
\begin{array}{lrr}
\underset{\cdot}{\lambda}_3 = e \times 0{,}7114 & & 9{,}852114 \\
 & \lg.\ 8\,e & 9{,}809614 \\
\hline
 & & 9{,}661728 \\
 & \lambda_0 & 9{,}709270 \\
\hline
 & & 9{,}952458
\end{array}
$$

pero $9{,}952444 = \lg.\ \sqrt[3]{\frac{18}{25}}$

de ahí se saca $\dot{\lambda}_3 = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{25}{18}}$; $\underset{\cdot}{\lambda}_3 = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{18}{25}}$

$$
\begin{array}{lrr}
\dot{\lambda}_1 = e\ \ 0{,}8225 & \lg. & 9{,}915126 \\
\underset{\cdot}{\lambda}_1 = e\ \ 0{,}7635 & & 9{,}882809 \\
 & \lg.\ e & 0{,}809614 \\
\hline
 & & 9{,}692423 \\
 & \lg.\ \lambda_0 & 9{,}709270 \\
\hline
 & & 9{,}983153 \\
\text{pero} & & 9{,}982949\ \ \sqrt[3]{\frac{8}{9}} \\
\hline
 & & 0{,}000204
\end{array}
$$

Por consiguiente:

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_0 \sqrt[3]{\tfrac{9}{8}}\ ;\ \underset{\cdot}{\lambda}_1 = \lambda_0 \sqrt[3]{\tfrac{8}{9}}$$

Ya tenemos el valor exacto de los coeficientes de órden *impar*; para completar la lista i establecer el valor de los coeficientes de órden par, haremos uso de la primera tabla que resultará mui lijeramente modificada:

$$
\begin{array}{lr@{\quad}lr}
\text{lg. } \dot{\lambda}_2 = & 9{,}741152 \;; & \text{lg. } \underset{\cdot}{\lambda}_2 = & 9{,}676694 \\
\text{» } \lambda_0 & 9{,}709270 & & 9{,}709270 \\
\hline
 & 0{,}031882 & & 9{,}967424 \\
\text{lg. } \sqrt[3]{\frac{5}{4}} = & 0{,}032304 & \text{lg. } \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = & 9{,}967696
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr@{\quad}lr}
\text{lg. } \lambda_4 & 9{,}765669 \;; & \text{lg. } \underset{\cdot}{\lambda}_4 & 9{,}652346 \\
\text{» } \lambda_0 & 9{,}709270 & & 9{,}709270 \\
\hline
 & 0{,}056399 & & 9{,}943076 \\
\text{lg. } \sqrt[3]{\frac{40}{27}} & 0{,}057024 \;\lambda & \text{lg. } \sqrt[3]{\frac{27}{40}} & 9{,}942976
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr@{\quad}lr}
\text{lg. } \dot{\lambda}_6 = & 9{,}792392 \;; & \text{lg. } \underset{\cdot}{\lambda}_6 & 9{,}626340 \\
\text{»} & 9{,}709270 & & 9{,}709270 \\
\hline
 & 0{,}083122 & & 9{,}917070 \\
\text{lg. } \sqrt[3]{\frac{16}{9}} & 0{,}083292 & \text{lg. } \sqrt[3]{\frac{9}{16}} & 9{,}916708
\end{array}
$$

Reuniendo todos esos valores formamos la tabla adjunta que difiere de un modo insignificante con la tabla dada por la observacion.

La analojía asombrosa que existe entre la série de los colores del espectro i la escala musical resalta a la vista: en ámbas encontramos los mismos intervalos (no tomando en cuenta la raiz 3.ª):

$\frac{8}{9}$ tono mayor de los músicos.

$\frac{9}{10}$ tono menor id.
id.

$\frac{15}{16}$ semi-tono.

EL ESPECTRO SOLAR RECTIFICADO

TABLA DE LOS VALORES EXACTOS DE LAS LONJITUDES DE ONDAS DE LOS COLORES DEL ESPECTRO

Intervalos consecutivos	LADO MENOS REFRANJIBLE			LADO MAS REFRANJIBLE		
	Signos	Valor numérico	Logaritmos	Signos	Valor numérico	Logaritmos
	$\dot{\lambda}_7$	$\lambda_0 \sqrt[3]{2}$	9,809613	$\underset{\cdot}{\lambda}_7$	$\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	9,608926
$\sqrt[3]{\frac{8}{9}}$						
	$\dot{\lambda}_6$	$\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{16}{9}}$	9,792562	$\underset{\cdot}{\lambda}_6$	$\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$	9,625977
$\sqrt[3]{\frac{8}{9}}$						
	$\dot{\lambda}_5$	$\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{128}{81}}$	9,775511	$\underset{\cdot}{\lambda}_5$	$\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{81}{128}}$	9,643028
$\sqrt[3]{\frac{15}{16}}$						
	$\dot{\lambda}_4$	$\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{80}{81}\frac{3}{2}}$	9,766168	$\underset{\cdot}{\lambda}_4$	$\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{81}{80}\frac{2}{3}}$	9,652371
$\sqrt[3]{\frac{15}{16}}$						
	$\dot{\lambda}_3$	$\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{25}{18}}$	9,756825	$\underset{\cdot}{\lambda}_3$	$\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{18}{25}}$	9,661714
$\sqrt[3]{\frac{9}{10}}$						
	$\dot{\lambda}_2$	$\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$	9,741573	$\underset{\cdot}{\lambda}_2$	$\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$	9,676966
$\sqrt[3]{\frac{9}{10}}$						
	$\dot{\lambda}_1$	$\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{9}{8}}$	9,726320	$\underset{\cdot}{\lambda}_1$	$\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{8}{9}}$	9,692219
$\sqrt[3]{\frac{8}{9}}$						

$$\lambda_0 = \frac{64}{125}\sqrt[3]{1} \qquad \text{lg. } 9,709270$$

Dejando para mas tarde las observaciones que sujiere la vista de la presente tabla, prosigo la esposicion de los hechos.

DISPOSICION DE LA SÉRIE

A primera vista la série total desde el estremo rojo hasta el estremo morado parece corresponder a 2 escalas (empleando el término musical); pero un exámen mas detenido indica que en lugar de dos escalas pueden ser dos partes de una misma escala, partes análogas a los tetracordios de los músicos griegos. Esta division, que ha adoptado la música moderna, léjos de ser arbitraria está perfectamente justificada por la tabla presente; hai una lijera distincion que tomar en cuenta, a saber:

«A los letrochordios de la música corresponden los octracordios del espectro».

En cuanto al modo como se debe prolongar la série a ámbos lados, toda duda desaparece gracias a una propiedad de las ondas, (para abreviar suprimo la palabra lonjitud) la que se puede espresar así:

El cuadrado de las ondas de órden par es igual al producto de las ondas adyacentes (de órden impar por consiguiente)».

Es decir que aljebraicamente esta propiedad se espresa por la ecuacion: $(\lambda_{2m})^2 = (\lambda_{2m-1})(\lambda_{2m+1})$.

La série, pues, para obedecer a esta condicion i a la primitiva $\underset{\cdot}{\lambda}\,\dot{\lambda} = \lambda_0^2$, debe prolongarse a ámbos lados del centro (verde) del del modo siguiente (ver la tabla especial que va al último de esta memoria).

Hácia el lado de mayor refranjibilidad (morado) i a continuacion de $\underset{\cdot}{\lambda}_7 = \lambda_0 \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$ se traslada el octacordio ménos refranjible, que principió por $\underset{\cdot}{\lambda}_6 = \sqrt[3]{\tfrac{9}{16}}$, despues de dividirlo por $\sqrt[3]{4}$ de modo que

$$\frac{\dot{\lambda}_7}{\sqrt[3]{4}} \text{ corresponde a } \underset{\cdot}{\lambda}_7 \;;\; \frac{\lambda'_6}{\sqrt[3]{4}} \text{ a } \underset{\cdot}{\lambda}_8 \;\; \& \;\&$$

Idénticamente de la misma manera el octacordio mas refranjible se trasporta al lado opuesto teniendo cuidado de multiplicar cada nota por $\sqrt[3]{4}$; así vemos que $\lambda_0 \sqrt[3]{4}$ viene a ser el color (iba a decir la nota) fundamental a que pertenece $\dot{\lambda}_7$ &.

ESTUDIOS ESPECTROCÓPICOS

Apliquemos los principios que anteceden al estudio de un ramo de ciencia nuevo o, como diria Humbold, de una disciplina enteramente moderna destinada a ejercer sobre el conjunto de nuestros conocimientos una influencia cuya magnitud es realmente incalculable, me refiero a los fenómenos de análisis espectral.

Principiemos por el espectro del hidrójeno.

Las 4 rayas que lo componen (1) tienen por lonjitud de ondas los números siguientes:

α	Tres vive..................................	656,2
β	Bande diffuse avec milieu vif..........	486
γ	Tres diffuse................................	434
δ	Bande faible diffuse......................	410

(1) Estos números son sacados de la obra de Schütyenbergen. Chimie generale.

Tomando los logaritmos los dispondremos del modo siguiente:

Lg. $\lambda\alpha$=9,816983	lg. β 9,686689	lg. γ 9,637489	$\lambda\delta$ 9,612911
9,709270	9,709270	9,709270	9,709270
$\varkappa\alpha$ 0,107713	$\varkappa\beta$ 9,977419	$\varkappa j$ 9,928219	$\varkappa\delta$ 9,903641

Se trata de hallar la significacion (al ménos *plausible*) de los coeficientes $\varkappa$.

Para facilitar las pesquizas podemos considerar las rayas de este espectro como *alteraciones* o empleando la voz técnica *modulaciones* de los colores correspondientes del espectro solar; este modo de ver nos induce a emprender la *comparacion* siguiente:

$$
\begin{array}{rlcrl}
\text{lg. } \gamma\beta & = 9{,}686689 & \qquad & \text{lg. } \lambda\gamma & = 9{,}637488 \\
\text{»}\ \ \underset{\cdot}{\lambda}_1 & = 9{,}692219 & & \underset{\cdot}{\lambda}_5 & = 9{,}643028 \\
\hline
& 9{,}994470 & & & 9{,}994461
\end{array}
$$

luego, conseguimos la proporcion: $\dfrac{\lambda\beta}{\lambda\gamma} = \dfrac{\underset{\cdot}{\lambda}_1}{\underset{\cdot}{\lambda}_5} = \dfrac{16}{9} \times \dfrac{64}{81}$

Así, pues, se trata aquí de 2.as potencias; por consiguiente, tenemos que estraer la raiz cuadrada de 9,994465=9,997232

pero lg. $\sqrt[3]{\left(\frac{125}{128}\right)^2 \frac{250}{243}}$ =9,997244

La diferencia entre estos 2 logaritmos es tan insignificante que debemos considerarnos suficientemente autorizados para admitir el valor de arriba i entónces sentaremos

	Logaritmos
$\lambda\beta = \underset{\cdot}{\lambda}_1 \sqrt[3]{\left(\left(\frac{125}{128}\right)^2\left(\frac{250}{243}\right)\right)^2} = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{8}{9}\left(\left(\frac{125}{128}\right)^2\left(\frac{250}{243}\right)\right)^2}$	9,686707
$\lambda\gamma = \underset{\cdot}{\lambda}_5 \sqrt[3]{\left(\left(\frac{125}{148}\right)^2\left(\frac{250}{243}\right)\right)^2} = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{81}{128}\left(\left(\frac{125}{128}\right)^2 \frac{250}{243}\right)\right)^2}$	9,637516

Por medio del mismo procedimiento sacamos

$$
\begin{array}{r}
\lg.\ \lambda\,\alpha = 9{,}816983 \\
\dot{\lambda}_\gamma = 9{,}809612 \\
\hline
0{,}007370
\end{array}
$$

$$\text{i}\quad \sqrt[3]{\left(\tfrac{128}{125}\right)^2 \tfrac{250}{243} \left(\tfrac{80}{81}\right)^2} = 0{,}007383$$

Por consiguiente podemos escribir:

$$\lambda\,\alpha = \dot{\lambda}_\gamma\ \sqrt[3]{\left(\tfrac{128}{125}\right)^2 \tfrac{250}{243} \left(\tfrac{80}{81}\right)^2} = \lambda_0\ \sqrt[3]{\left(\tfrac{128}{125}\right)^2 \tfrac{250}{242} \left(\tfrac{80}{81}\right)^2};\quad \lg.\ 9{,}816996$$

En cuanto a $\lambda\,\delta$, es fácil establecer su valor por medio de $\lambda\,\gamma$.

$$
\begin{array}{r}
\text{Lg. } \lambda\,\delta = 9{,}612911 \\
9{,}637489 \\
\hline
9{,}975422
\end{array}
\qquad 9{,}975405 = \sqrt[3]{\tfrac{27}{32}}
$$

i el valor de $\lambda\,\delta$ será:

$$
\lambda\,\delta = \lambda\,\gamma\ \sqrt[3]{\tfrac{27}{32}} \qquad
\begin{array}{r}
\lg.\ \lambda\,\delta = 9{,}637516 \\
9{,}775405 \\
\hline
9{,}612921
\end{array}
$$

LOGARITMOS DE LOS NÚMEROS CALCULADOS COMPARADOS CON LOS LOGARITMOS DE LOS NÚMEROS OBSERVADOS

	α	β	γ	δ
Calculado =	9,816997	9,686707	9,637516	9,612921
Observado =	9,816983	9,686689	9,647489	9,612911
	0,000014	0,000018	0,000017	0,000010

Resúmen.—Las pocas diferencias que presentan estos logaritmos me parecen un argumento *plausible* en favor de la adopcion de las espresiones que acabamos de encontrar

$$\lambda\,\alpha = \lambda_0 \sqrt[3]{2\left(\tfrac{128}{125}\right)^2 \tfrac{250}{243} \left(\tfrac{80}{81}\right)^2}$$

$$» \ \beta = \lambda_0 \sqrt[3]{\tfrac{8}{9}\left(\left(\tfrac{125}{128}\right)^2 \tfrac{250}{243}\right)^2}$$

$$» \ \gamma = \lambda_0 \sqrt[3]{\tfrac{81}{128}\left(\left(\tfrac{125}{128}\right)^2 \left(\tfrac{250}{243}\right) \right)^1}$$

$$» \ \delta = \lambda_0 \sqrt[3]{\tfrac{81}{128}\ \tfrac{27}{32} \left(\left(\tfrac{125}{128}\right)^2 \tfrac{250}{243}\right)^2}$$

Ademas reina entre todos una simetría mui notable; pero en resumidas cuentas la única cosa perfectamente segura es la proporcion

$$\frac{\lambda\,\beta}{\lambda_1} = \frac{\lambda\,\gamma}{\lambda_5}$$

independiente de los valores asignados a los coeficientes.

Pasemos ahora al espectro del Cloro (1).

SIGNOS	RAYAS I LONJITUD DE ONDAS				LOGARITMOS
λ a	α		Vive........................	611	9,786041
» b	β	1	Vive........................	546	9,737191
» c		2	Vive........................	544,5	9,735998
» d		3	Tres vive.................	542,5	9,734239
» e		4	Vive........................	539	9,731588
» f	γ		Tres vive diffuse.........	521,6	9,717337
» g	δ	1	Vive........................	510,1	9,707655
» h		2	Vive........................	507,5	9,705436
» i	ε	1	Double la 2.e............	492,0	9,691965
» j		2	....	489,5	9,689753
» k	ζ	1	....	482,0	9,683047
» l		2	....	481,0	9,682145
» m	η	1	....	457,0	9,659916

(1) Sacado de la obra arriba mencionada, Chimie generale.

Por desgracia la lista no está completa, falta el estremo mas refranjible; pero tal como está en dicha lista ofrece bastante interes; observamos : 2 rayas aisladas α i γ i 5 grupos:

β	compuesto de	4	rayas.
δ	id.	2	»
ε	id.	2	»
ζ	id.	2	»
η	id.	3	»

Luego veremos que esta division no es del todo exacta; omitiendo la lista de los coeficientes, que tiene poca importancia en el caso presente formaremos las dos tablas siguientes:

I

λ a	9,786041—λ b	9,737191—λ c	9,735998—λ d	9,734239
$\dot{\lambda}_2$	9,792562—$\dot{\lambda}_2$	9,741573—$\dot{\lambda}_2$	9,741573—$\dot{\lambda}_2$	9,741573
	9,993479	9,995618	9,994425	9,992666
λ e	9,731588—λ f	9,717337—λ g	9,707654—λ h	9,705436
$\dot{\lambda}_1$	9,726320—λ_0	9,709270—λ_0	9,709270—λ_0	9,709270
	0,005268	0,008067	9,998385	9,996166
λ i	9,691965—λ_5	9,689763—λ k	9,683047—γ l	9,682145
$\underset{\cdot}{\lambda}_1$	9,692219—$\underset{\cdot}{\lambda}_2$	9,692219—$\underset{\cdot}{\lambda}_2$	9,676966—$\underset{\cdot}{\lambda}_2$	9,676966
	9,999746	9,997534	0,006081	0,005179

II

(INTERVALOS SUCESIVOS)

λ a	9,786081—λ b	9,737191—λ c	9,735998—λ d	9,734239
» b	9,737191—» c	9,735998—» d	9,734239—» e	9,731588
	0,048890	0,001193	0,001759	0,002651
λ e	9,731588—λ f	9,717337—λ g	9,707655—λ h	9,705436
» f	9,717337—» g	9,707655—» h	9,705436—» i	9,691965
	0,014251	9,999682	0,002219	0,013471
λ i	9,691965—λ j	9,689753—λ k	9,683047—λ l	9,682145
» j	9,689753—» k	9,683047—» l	9,682145—» m	9,659916
	0,002212	0,006766	0,000902	0,022229

Principiaremos el estudio por el grupo ζ λm que probablemente está representado por la raya central.

$$\begin{array}{rl} \lg.\ \lambda_m & 9{,}659916 \\ \lambda_4 & 9{,}652370 \\ \hline & 0{,}007546 = \lg.\ \sqrt[3]{\tfrac{256}{243}} \quad ! \end{array}$$

Este factor tiene sus títulos de nobleza archivados en los anales de la filosofía griega (1).

Tambien haré notar una circunstancia digna de interes: no hai necesidad de alterar en lo mas mínimo el valor que da la observacion.

$$\text{Así pues} \quad \lambda_m = \lambda_4\ \sqrt[3]{\tfrac{256}{243}} = \lambda_0\ \sqrt[3]{\tfrac{9}{8}\ \tfrac{81}{80}\ \tfrac{256}{243}}$$

Pasaremos a λa

$$\begin{array}{rcll} \lg. \left(\dfrac{\lambda a}{\lambda 6}\right) & = & 9{,}993479 & \\ \lg. \left(\dfrac{\lambda m}{\lambda 4}\right) & = & 9{,}007545 & \text{pero} \\ \cline{3-3} & & 9{,}985934 & 9{,}992969 = \lg.\ \tfrac{125}{128}\left(\tfrac{80}{81}\right)^2 \\ & \checkmark. & 9{,}992967 & 9{,}995938 \end{array}$$

Por consiguiente

$$\lambda a = \dot{\lambda}\ 6\ \sqrt[3]{\tfrac{256}{243}\left(\left(\tfrac{125}{128}\right)\left(\tfrac{80}{81}\right)^2\right)^2} = \lambda_0\ \sqrt[3]{\tfrac{16}{9}\ \tfrac{256}{243}\left(\tfrac{125}{128}\left(\tfrac{80}{81}\right)^2\right)^2}$$

$$\lambda b = \lambda_2\ \sqrt[3]{\left(\tfrac{125}{128}\right)^3\ \tfrac{25}{24}} \quad = \lg.\ \lambda_2 \quad \begin{array}{r} 9{,}741573 \\ 9{,}995614 \\ \hline 9{,}737183 \end{array}$$

Para ahorrar tiempo doi a continuacion la tabla de los valores que me han parecido mas *plausibles*.

(1) Ver el Timeo de Platon.

RAYAS PRINCIPALES DEL ESPECTRO DEL CHLORO

Logaritmos

λ a $= 9{,}786046$; $\dot{\lambda}_6 \sqrt[3]{\frac{256}{243}\left(\left(\frac{125}{128}\right)\left(\frac{80}{81}\right)^2\right)^2} = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{16}{9}\ \frac{256}{243}\left(\frac{125}{128}\left(\frac{80}{81}\right)^2\right)^2}$

» b $9{,}737183$; $\dot{\lambda}_2 \sqrt[3]{\left(\frac{125}{128}\right)^3 \frac{25}{24}} = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{5}{4}\left(\frac{125}{128}\right)^3 \frac{25}{24}}$

» c $9{,}735990$; $\dot{\lambda}_2 \sqrt[3]{\left(\frac{125}{128}\left(\frac{81}{80}\right)^2\right)^2 \frac{24}{25}}$ $\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{6}{5}\left(\frac{125}{128}\left(\frac{81}{80}\right)^2\right)^2}$

» d $9{,}743240$; λ b $\sqrt[3]{\left(\frac{125}{128}\right)^4 \left(\frac{81}{80}\right)^6}$

» e $9{,}731599$; $\dot{\lambda} \sqrt[3]{\left(\left(\frac{125}{128}\right)^2 \frac{25}{24}\left(\frac{81}{80}\right)^2\right)^2}$

» f $9{,}717330$; $\lambda_0 \sqrt[3]{\left(\frac{256}{243}\right)^2 \frac{125}{128}\left(\frac{80}{81}\right)^2}$

» g $9{,}707659$; $\lambda_0 \sqrt[3]{\frac{256}{243}\ \frac{128}{125}\left(\frac{80}{81}\right)^7}$

» h $9{,}705436$; $\lambda_0 \sqrt[3]{\left(\frac{8}{5}\right)^2 \left(\frac{128}{125}\right)^2 \left(\frac{24}{25}\right)^2 \frac{81}{80}\left(\frac{27}{25}\right)^3}$

» i $9{,}691965$.

» j $9{,}699743$; $\underset{\cdot}{\lambda_1} \sqrt[3]{\frac{128}{125}\ \frac{24}{25}}$

» k $9{,}683039$; $\dot{\lambda}_2 \sqrt[3]{\frac{125}{128}\left(\frac{81}{80}\right)^2 \frac{25}{24}} = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{5}{6}\left(\frac{125}{128}\right)\left(\frac{81}{80}\right)^2}$

» l $9{,}682153$: $\lambda\beta$ H. $\sqrt[3]{\frac{25}{24}\left(\frac{125}{128}\ \frac{80}{81}\right)^2} = \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{25}{27}\left(\frac{125}{128}\right)^6 \left(\frac{250}{243}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^2}$

» m $9{,}659916$; $\underset{\cdot}{\lambda_4} \sqrt[3]{\frac{256}{243}}$

ADVERTENCIAS

1)—El valor de λ d se saca fácilmente por medio λ b, no hai necesidad de modificar el número dado por la observacion directa.

2)—Las 4 rayas λg, λh, λi, λj, forman la proporcion

$$\frac{\lambda g}{\lambda h} = \frac{\lambda i}{\lambda j}$$

3)—El valor de λi determinado mediante dicha proporcion sale tambien exacto sin alterar las cifras.

4)—Con mas razon todavía que para el espectro del hidrójeno hai motivos para no admitir estos valores sino a título provisorios.

5)—A priori parece indudable que debè existir una relacion mas o ménos íntima entre los valores que espresan la lonjitud de ondas de las rayas de todos los cuerpos; en este concepto nada mas natural que buscar puntos de comparacion en cualquier espectro para facilitar los cálculos. Por eso no he tenido reparo en apelar al espectro del hidrójeno para determinar λl.

6)—λe no pertenece al grupo de las anteriores; no es una alteracion de $\dot{\lambda}_2$ sino de $\dot{\lambda}_1$

Para terminar este estudio de espectroscopio vamos a examinar el espectro de un metal, el Vanadio, que segun Lockyer (1) existe en el sol, al ménos las 4 líneas moradas mas refranjibles de su espectro están representadas en el espectro Solar.

ESPECTRO DEL VANADIO

Signos		Lonjitud	Vanadio
λ a		6119	9,786680
» b		6089	9,784546
» c		6039	9,780965
» d		5725	9,757775
» e	faible	5697	9,755646
» f	faible	4459	9.649737
» g		4407	9,644143
» h	faible	4389	9,642365
» i		4384	9,641870
» j		4379	9,641375.

(1) Studies in spectrum analysis.

Es de suponer que no existen mas rayas que las anteriores en la parte visible del espectro porque en la obra de la que he sacado esta lista no se dice las principales líneas sino *las* líneas; en tal caso conviene determinar el espacio que ocupa de λa a λj. Desde luego se vé que está comprendida entre las «notas» $\dot{\lambda}_6$ i $\underset{\cdot}{\lambda}_5$, mas tarde *precisaremos* el intervalo.

I

EL ESPECTRO DEL VANADIO COMPARADO CON EL ESPECTRO SOLAR

λa	9,786680—	λb	9,784546—	λc	9,780965—	λd	9,757775
$\dot{\lambda}_6$	9,792562—	$\dot{\lambda}_6$	9,792562—	$\dot{\lambda}_5$	9,775510—	$\dot{\lambda}_3$	9,756826
	9,994118		9,991984		0,005455		0,000949
λe	9,755646—	λf	9,649237—	λg	9,644143—	λh	9,642365
$\dot{\lambda}_5$	9,756825—	$\dot{\lambda}_5$	9,643028—		9,643028—	$\dot{\lambda}_5$	9,643028
	9,998821		0,006209		0,001115		9,999337
λi	9,641870—	λj	9,641375				
$\underset{\cdot}{\lambda}_5$	9,643028—	$\underset{\cdot}{\lambda}_5$	9,643028				
	9,998842		9,998347				

II

(INTERVALOS CONSECUTIVOS)

λa	9,786630—	λb	9,784546—	λc	9,780965—	λd	9,757775—	λe	9,755646
» b	9,784546—	» c	9,780965—	» d	9,757775—	» e	9,755646—	» f	9,649237
	0,002134		0,003581		0,023190		0,002129		0,106409
λf	9,649237—	λg	9,644143—	λh	9,642365—	λi	9,641870—	λj	9,641375
» g	9,644143—	» h	9,642365—	» i	9,641870—	» a	9,641375—	» a	9,786680
	0,005094		0,001778		0,000495		0,000495		9,854695

RELACIONES

$$\frac{\lambda a}{\lambda b} = \frac{\lambda d}{\lambda e} \quad ; \quad \lambda h \times \lambda j = \lambda^2 \mathrm{I}.$$

Estas relaciones justifican el epíteto de rítmica que se da a la representacion gráfica de ciertos espectros.

$$\lg. \left(\frac{\gamma a}{\dot{\lambda}_6} \times \frac{\lambda j}{\underset{\bullet}{\lambda}_5} \right) = \begin{array}{l} 9{,}994118 \\ 9{,}998347 \\ \hline 9{,}992765 \\ 9{,}992455 = \lg. \sqrt[3]{\frac{243}{256}} = \mathrm{A} \end{array}$$

Veamos que existe simetría entre estos factores, si uno se representa por K el otro será $\frac{1}{\mathrm{K}}\,\mathrm{A}$.

de modo que el el cociente

$$\frac{\left(\frac{\lambda a}{\dot{\lambda}_6}\right)}{\left(\frac{\lambda j}{\underset{\bullet}{\lambda}_5}\right)} = \mathrm{K}^2\,\mathrm{A}$$

Efectivamente haciendo el cálculo hallamos por espresion de

$$\frac{1}{\mathrm{K}} = \begin{array}{l} 0{,}005887 \\ 9{,}994113 \\ 9{,}994115 = \lg. \sqrt[3]{\left(\frac{128}{125}\right)^3 \left(\frac{80}{81}\right)^9} \end{array}$$

pero

por consiguiente

$$\lambda a = \dot{\lambda}_6 \sqrt[3]{\left(\tfrac{128}{125}\right)^3 \left(\tfrac{80}{81}\right)^9} = \lambda_0 \sqrt[3]{\tfrac{16}{9} \left(\tfrac{128}{125}\right)^3 \left(\tfrac{80}{81}\right)^9}$$

$$\lambda j = \underset{\bullet}{\lambda}_5 \sqrt[3]{\tfrac{243}{256} \left(\tfrac{125}{128}\right)^3 \left(\tfrac{81}{80}\right)^9} = \lambda_0 \sqrt[3]{\tfrac{81}{128}\; \tfrac{243}{256} \left(\tfrac{125}{128}\right)^3 \left(\tfrac{81}{80}\right)^9}.$$

El valor de λi se consigue por medio de la relacion

$$\lg.\ \frac{\lambda i}{\lambda j}=0{,}000495 \text{ observando que } 0{,}000490=\lg.\ \left(\frac{125}{128}\right)^3\left(\frac{81}{80}\right)^6$$

i el de λb por la relacion:

$$\lg.\ \frac{\lambda a}{\lambda b}=0{,}002130 \text{ o sea } 0{,}002125=\lg.\ \left(\frac{125}{128}\right)^2\left(\frac{81}{80}\right)^5$$

entónces tendremos la espresion:

$$\lambda b=\lambda a\ \sqrt[3]{\left(\tfrac{128}{125}\right)^2\left(\tfrac{80}{81}\right)^5}=\dot{\lambda}_8\ \sqrt[3]{\left(\tfrac{128}{125}\right)^5\left(\tfrac{80}{81}\right)^{14}}$$

Por complicado que parezca este radical hai mucha probabilidad de que sea exacto como pronto lo veremos.

$\lambda c=\lambda b\ \sqrt[3]{\left(\tfrac{80}{81}\right)^2}$ (?) de la única línea que me parece poder dejar lugar a dudas, de todas las que componen este espectro.

$$\lambda d=\dot{\lambda}_3\ \sqrt[3]{\left(\tfrac{128}{125}\right)^2\tfrac{24}{25}}=\lambda_0\ \sqrt[3]{\tfrac{4}{3}\left(\tfrac{128}{125}\right)^2}$$

$$\text{»}\ e=\lambda f\ \sqrt[3]{\left(\tfrac{125}{128}\right)^2\left(\tfrac{81}{80}\right)^2\tfrac{15}{12}}$$

$$\text{»}\ f=\underset{\cdot}{\lambda_5}\ \sqrt[3]{\left(\left(\tfrac{128}{125}\right)^3\left(\tfrac{80}{81}\right)^4\right)^2}=\lambda_0\ \sqrt[3]{\tfrac{16}{25}\left(\tfrac{128}{125}\right)^5\left(\tfrac{80}{81}\right)^7}$$

Si se efectua las *reducciones* se ve aparecer el valor de λe bajo la forma $\lambda_0\ \sqrt[3]{\tfrac{4}{3}\left(\tfrac{128}{125}\right)^2\left(\tfrac{80}{81}\right)^5}$ que confirma de un modo mui satisfactorio la exactitud de los coeficientes anteriores.

En efecto la marcha de la operacion ha sido la siguiente: 1.º determinacion λf por medio de $\underset{\cdot}{\lambda_5}$, que es fácil; 2.º determinacion de λe por medio de λf, que tampoco no ofrecen dificultad. El resultado siendo el mismo que si se hubiese hecho uso de la relacion $\frac{\lambda d}{\lambda e}$, hai gran probabilidad de que el valor hallado sea exacta. Sin entrar en mas pormenores doi a continuacion la tabla completa.

ESPECTRO DEL VANADIO

TABLA DE LOS VALORES RECTIFICADOS DE LAS LONJITUDES DE ONDAS

	Logaritmos		
λ a =	9,786677	; $\dot{\lambda}_5 \sqrt[3]{\left(\frac{128}{125}\right)^3 \left(\frac{80}{81}\right)^9}$	$= \dot{\lambda}_0 \sqrt[3]{\frac{16}{9} \left(\frac{128}{125}\right)^3 \left(\frac{80}{81}\right)^9}$
» b	9,784552	; $\lambda a \sqrt[3]{\left(\frac{128}{125}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^5}$	$= \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{16}{9} \left(\frac{128}{125}\right)^5 \left(\frac{80}{81}\right)^9}$
» c	9,780956	; $\lambda b \sqrt[3]{\left(\frac{80}{81}\right)^2}$	$= \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{16}{9} \left(\frac{128}{125}\right)^5 \left(\frac{80}{81}\right)^{11}}$
» d	9,757782	; $\dot{\lambda}_3 \sqrt[3]{\left(\frac{128}{125}\right)^2 \frac{24}{25}}$	$= \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{4}{3} \left(\frac{128}{125}\right)^2}$
» e	9,755656	; $\lambda f \sqrt[3]{\left(\frac{125}{128}\right)^2 \left(\frac{81}{80}\right)^2 \frac{25}{12}}$	$= \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{4}{3} \left(\frac{128}{125}\right)^4 \left(\frac{80}{81}\right)^5}$
» f	9,649241	; $\dot{\lambda}_5 \sqrt[3]{\left(\frac{128}{125}\right)^6 \left(\frac{80}{81}\right)^6}$	$= \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{16}{25} \left(\frac{128}{125}\right)^5 \left(\frac{80}{81}\right)^7}$
» g	9,644148	; $\lambda^5 \sqrt[3]{\frac{4}{5} \left(\frac{27}{25}\right)^3}$	$= \lambda_0 \sqrt[3]{\frac{1}{2} \frac{81}{80} \left(\frac{27}{25}\right)^3}$
» h	9,642350	; $\lambda_5 \sqrt[3]{\frac{243}{256} \left(\frac{125}{128}\right)^9 \left(\frac{81}{80}\right)^{21}}$	
» i	9,641860	; $\lambda^5 \sqrt[3]{\frac{243}{256} \left(\frac{125}{128}\right)^6 \left(\frac{81}{80}\right)^{15}}$	
» j	9,641370	; $\lambda_5 \sqrt[3]{\frac{243}{256} \left(\frac{125}{128}\right)^3 \left(\frac{81}{80}\right)^9}$	

Dando por terminado el estudio de los espectros, en cuanto al modo de espresar la lonjitud de ondas, paso a otras aplicaciones de la fórmula jeneral $\lambda = \lambda_0 \varkappa$.

REFRACCION, POLARIZACION, DISPERSION

Esta clase de fenómenos tiene una importancia mui considerable para el minerálogo i, mas aun, para el filósofo i para todos los que se preocupen de las propiedades íntimas de la materia.

Por desgracia el ramo de física a que pertenecen ha sido algo descuidado, quedan por resolver los problemas mas fundamentales.

Por ejemplo, respecto a la polarizacion ¿cuál de los diversos colores obedece a la luz de Brenster? Probablemente el que corresponde a λ_0, al ménos esta es la suposicion que parece mas natural. Pero, con todo, es necesario averiguarlo, cosa, por lo demas, mui fácil, una vez que estén determinadas las rayas que corresponden a los colores de la *escala* luminosa.

El espectro del Titano presenta, precisamente, una raya con lonjitud de onda=512.

De todos modos conviene esperimentar con colores situados a igual distancia de λ_0, a los que hemos dado provisoriamente el nombre de correlativos.

Si se opera elijiendo el ángulo de polarizacion los resultados serán mas completos, dando a la vez las espresiones exactas i significativas (no meros valores numéricos) de

la refraccion $$\frac{\lambda_0}{\psi\ \lambda_0} = L$$

la polarizacion $$L.\ ;\ \mathrm{lg.}\ P. = \left(\frac{\lambda_0}{\psi\ \lambda_0}\right)\ (?)$$

la dispersion $$\frac{\lambda_r}{\psi\ \lambda_r}\ ;\ \frac{\lambda_v}{\psi\ \lambda_v}$$

COLORES COMPLEMENTARIOS

Otra cuestion algo oscura i que deja mucho que desear. Parece que el problema es complejo i que la parte puramente sujetiva es preponderante.

Los tratados de física contienen la lista siguiente:

Límites morado i colorado juntos reproducen el blanco con el verde, es decir

λ'_7 i λ_7	(juntos)	»	λ_0
$\dot{\lambda}_5$	el colorado	»	λ_1 azul-verde
λ_6	el morado	»	$\dot{\lambda}_1$ amarillo verde
$\dot{\lambda}_4$	el anaranjado	»	λ_2 azul
λ_4	el indigo	»	$\dot{\lambda}_3$ amarillo

Fuera de la simetría en los indicios no se observa en las espresiones ninguna particularidad notable; pues, si bien la relacion $x_6 = \frac{16}{9}$ con $x_1 = \frac{8}{9}$ parece satisfactorio no así la de x_4 con x_3 $\frac{40}{27}$ con $\frac{4}{5}$.

En cuanto a la lista mas esplícita que da Helmhaltz i que reproduce Funke (1) no arroja tampoco resultados fáciles de apreciar; aunque los 4 colores ménos refranjibles parecen formar una especie de progresion $\frac{c}{d} = x$; $\frac{b}{c} = x^2$; $\frac{a}{b} = x^4$, como las complementarias correspondientes no ofrecen nada que se les parezca, la cosa no pasa de ser una simple casualidad.

NUEVAS OBSERVACIONES POR HACER

Hai dos séries de observaciones que son mui interesantes i ademas mui necesarias para aclarar la cuestion fisiolójica.

1.°)—¿A qué colores o matices da oríjen la superposicion de los colores correlativos por ejemplo: $\dot{\lambda}_1$ con λ_1 (?) etc.

2.°)—Del mismo modo ¿cuál es la impresion producida en los órganos de la vista por la reunion de colores que difieren por los intervalos de un octacordio, i dos octacordios?

Parece mui racional el volver a emprender los esperimentos iniciados hace unos 30 años en Inglaterra para dilucidar la cuestion de estas curiosas anomalías conocidas bajo el nombre de «*Colour-blindness*».

Quien sabe si varios de los fenómenos que se observan i son puramente subjetivos no corresponden a una diferencia de raza. Al ménos, así lo hace suponer la analojía entre sonidos i colores.

---

(1) Lehrbuchder Physiologie.

LÍMITES DEL ESPECTRO VISIBLE

La última onda perceptible por el lado colorado tiene una lonjitud representada por el número 723 (1).

$$
\begin{array}{rl}
\text{lg.} & 9{,}159138 \\
\text{lg. } \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}} & 0{,}200687 \quad \text{para alzarlo hasta el octacordio conocido.} \\
\hline
 & 9{,}658451 \\
\text{lg. } \lambda_4 & 9{,}652371 \\
\hline
 & 0{,}006080 \\
 & 0{,}006073 \quad \text{lg. } \sqrt[3]{\tfrac{125}{128}\left(\tfrac{81}{80}\right)^2 \tfrac{25}{24}}
\end{array}
$$

Límite colorado.

$$\lambda_0 \sqrt[3]{4.\tfrac{2}{3}.\tfrac{125}{128}\left(\tfrac{81}{80}\right)^3} \qquad \text{lg. } 9{,}859131.$$

Así pues el límite por este lado cae entre las *notas* $\dot{\lambda}_{10}$ i $\dot{\lambda}_{11}$ o sea en el 4.° intervalo de la escala ut_1 (ver la tabla).

Estremo morado $\lambda = 397$

$$
\begin{array}{ll}
\text{lg. } 397 & 9{,}598790 \\
\text{» } \lambda_7 & 9{,}608926 \\
\hline
 & 9{,}989864 = \text{lg. } \sqrt[3]{\left(\tfrac{128}{125}\right)^4 \left(\tfrac{81}{80}\right)^2}
\end{array}
$$

(Aquí no hai nada que cambiar en las cifras).

Resulta, pues, que el límite morado cae entre λ_7 i λ_8; la estension por el lado mas refranjible es menor que por el lado colorado, hai una diferencia de 3 intervalos.

Pero no se debe perder de vista que aquí tambien el elemento subjetivo debe entrar en cuenta.

EL METRO

Al fin hemos llegado al objeto primitivo de este trabajo. A nadie se le habrá escapado la observacion de un hecho prodijiosamente asombroso: el metro no es el resultado de la malograda tentativa de hallar un tipo inmutable en las dimensiones de la

(1) Chimie generale de Schötzenberger.

tierra; no es una funcion de la entidad ideal que se llama meridiano terrestre: el metro es de oríjen celeste, el metro i la luz son coexistentes. ¡Qué lindo tema para la imajinacion oriental en su edad de oro! Un senáculo de sabios animados de un ardiente amor hácia la humanidad, imajinan de sustituir a esa multitud de medidas heterojéneas, causa de desunion, una única, símbolo de la union que en adelante debe enlazarnos. Pero ellos son hombres i sujetos al error, por fortuna los jénios benéficos encargados de vijilar nuestros actos, intervienen i el metro aparece. Nosotros, occidentales, mas positivos debemos ver allí una realizacion acertada de la hermosa máxima.

«*Fais ce que dois advienne que pourra*».

De todos modos no podríamos sin injusticia dejar de tributar nuestro continjente de gratitud a la memoria de los iniciadores de tan útiles reformas, i en particular a la memoria de los que nos han hecho el don de tan preciosa medida.

ESTENSION DEL SISTEMA MÉTRICO

Una de las grandes ventajas de este feliz sistema es la facilidad de crear unidades adoptadas al objeto que se tiene en vista.

Así tenemos para la topografía el miriámetro, para los viajes el kilómetro i la legua, para las transacciones diarias el metro, centímetro, etc.

Del mismo modo para la avaluacion de las distancias moleculares se necesita una unidad que esté en armonía con las diminutivas dimensiones que allí se consideran. El milímetro es ya un grandor excesivo i realmente colosal; la milésima parte del milímetro es la unidad deseada, i es la que hemos adoptado en este trabajo, el nombre de esta unidad molecular, que se impone i que la analojía i la lójica exijen es el de micrómetro.

Es cierto que algunas veces se emplea este térmido para designar un instrumento; pero el buen sentido condena tan vicioso modo de espresarse. El instrumento destinado a medir no es la medida; el compas no es el metro, el pequeño compas (aparato micrométrico) no es el pequeño metro. Si se invoca la prescripcion invocaremos la autoridad de uno de los patriarcas de la ciencia.

«*Ignorance or carelesness should not be allowed to give perpetuity, to ils blunders under any law of priority*» (1).

La série de las unidades métricas seria, pues:

Kilómetro; metro; milímetro; micrómetro; micromilímetro.

KM M MM m mm

queda la relaciones simétricas:

$$\overline{\text{KM}} \times \overline{\text{MM}} = \text{M}^2 \quad ; \quad \overline{\text{MM}} \times \overline{\text{mm}} = \text{m}^2$$

La derivacion de las demas unidades se puede hacer del mismo modo.

A la unidad de volúmen—«el litro»=1 decímetro cúbico corresponde «el micrólitro»=1 microdecímetro cúbico.

Al «gramo», peso de 1 centímetro cúbico de agua.
El microgramo id. 1 microcentímetro id.

Para pasar de una série a otra bastan una coma i unos cuantos ceros.

No se puede desear mayor sencillez.

En cuanto a las ventajas que ha de reportar esta estension del sistema métrico no son dudosas: desde luego se echa de ver que los cálculos se simplifican i que las espresiones se hacen mas significativas.

(1) Dona—Mineralog, introduction.

RESÚMEN JENERAL

DEDUCCIONES

La rápida (talvez lacónica) esposicion que antecede no bastaria por sí sola a dilucidar completamente la materia que forma el tomo del presente trabajo, resta otra tarea que cumplir, la de enumerar las consecuencias, o corolarios que se desprenden de la proposicion fundamental representada por la fórmula:

$$\lambda = \lambda_0 \, x \, .$$

Pero ántes de todo tengo que hacer una advertencia indispensable, si la palabra «*analojía*» viene tan a menudo reproducido en estas pájinas, hai, para ello, un motivo poderoso i fundada en el oríjen de este trabajo; en efecto, convencido i, firmemente convencido, de que la *analojía* constituye un principio absoluto, al que todas las cosas, en el universo, están subordinadas, me propuse, hace ya tiempo, basar sobre este principio, un método de investigacion tomando por modelo el órden i los procedimientos acostumbrados en la *análisis* matemática.

Debo añadir que hasta ahora los resultados han salido suficientemente satisfactorios.

Es cierto que el problema que sirvió de punto de partida a los demas, se presta del modo mas completo al empleo de esta clase de procedimientos basados sobre la analojía.

En efecto, este problema consiste en buscar la resolucion de la ecuacion del 3.^{er} grado por medio de la trigonometría; basta enunciarlo para que desde luego se eche de ver la perfecta analojía o, por mejor decir, la HOMOLOJÍA entre las raices de la ecuacion del 2.° grado, consideradas como los catetos de un triángulo recto i las raices del 3.^{er} grado representadas por las aristas de un tetraedro con vértice rectangular. Sí, para que la analojía sea mas *estrecha* todavía, el triángulo va inscrito en una circunferencia de círculo i el tetraedro en una esfera, entónces los resultados que dan las relaciones entre los varios elementos de estas figuras no dejan nada que desear en cuanto al objeto en vista i ademas proporcionan un método nuevo para el estudio de los sólidos i por consiguiente de la cristalografía. Pero, con la cristalografía están íntimamente ligados los fenómenos ópticos, i de allí resulta que insensiblemente i por la fuerza de las cosas el primitivo problema, puramente matemático, ha venido a parar en una cuestion enteramente física i química.

Despues de esta esplicacion nadie estrañará mi insistencia en ponderar el papel prominente que desempeña la analojía; i, si mis apreciaciones parecen exajeradas, tienen al ménos el mérito de la sinceridad; no están inspiradas por el necio prurito de imitar a los antiguos sofistas, abogando «*a outrance*» por una tésis antojadizamente elejida.

Comparacion entre la luz i los sonidos musicales.—De que, desde los tiempo mas remotos la analojía entre la luz i el sonido, aparece como una verdad formalmente estampada en la conciencia humana, no puede quedar la menor duda. Ya Homero compara la voz *blanca* de los ancianos de *Ilion* a la azucena. Toda la terminolojía adoptada por los músicos griegos está basada sobre esta analojía.

Pero, si se considera la concordancia completa que existe entre ambas clases de fenómenos, tomando en cuenta las relaciones numéricas que son idénticas, la palabra analojía viene a ser insuficiente. En efecto, desde los tiempos de Theler i Pythagoras, la gama musical u octacordio se compone de 2 tetracordios, cada uno de ellos incluyendo una *cuarta.*

El órden de las notas puede variar, i a cada variacion corresponde un «*modo*» distinto; pero la relacion entre las notas consecutivas es siempre la misma a saber:

ó	un tono mayor....................	$\frac{8}{9}$
ó	un tono menor....................	$\frac{9}{10}$
ó	un semi-tono......................	$\frac{15}{16}$

Nocion de la correlacion.—Ya en aquellos tiempos vemos la nocion de la *correlacion* aparecer mui de manifiesto en la disposicion i en el arreglo de las escalas que llevan el nombre de Myxolydia i de Hypolydia (1).

(1) Véase la obra de Rudolf Watphal «Hermonik und Melopöie der griechen», páj. 78.

Myxolydia, si, ut, re, mi, fa, sol, la, si
Hypolydia, fa, mi, re, ut, si, la, sol, fa
Intervalos, $\frac{1}{2}$ 1 1 $\frac{1}{2}$ 1 1 1.

Es una mera tentativa i no se debe exijir una completa exactitud matemática; sin embargo, el hecho de comparar ambas escalas en sentido invertido es digno de llamar la atencion; es el primer paso hacia el estudio sistemático de los fenómenos sonoros i hácia el conocimiento de esta condicion característica de ellas, a saber la *correlacion*.

Pero la música de los griegos nos reserva todavía mayores sorpresas. En su contínuo i constante afan para perfeccionar a la vez el arte i la ciencia de los sonidos musicales, modificando i, sobre todo, ensanchando las escalas, los vemos llegar de tetracordios en heptacordios, de octacordios en dodecacordios, etc., hasta la escala siguiente:

la, si, tn, re, mi, fa, sol, la, si, ut, re, mi, fa, sol, la. (1)
< octacordio >< octacordio >

I, a esta escala, segun lo refiere el célebre matemático Claudio Ptolemeo, le dan el nombre de

Σύστημα τέλειον καὶ ἀμετάβολον

¡ESCALA COMPLETA E INMUTABLE!

Que se reemplace la fundamental «*la*» por la fundamental «*ut*» i tendremos un *calco* del espectro solar.

La tabla siguiente pone de manifiesto el paralelismo notable que existe entre los fenómenos sonoros i luminosos.

(1) Rud. Westphal loc cit., p. 98.

CONDICIONES	SONIDO	LUZ
Espresiones aljebraicas..........	$L = L_0 K$; $LL' = L_0^2$	$\Lambda = \Lambda_0 K$; $\Lambda \Lambda' = \Lambda_0^2$
Movimiento vibratorio............	Lonjitudinal................	Transversal.
Vehículo...........	El aire	El ether.
Lonjitud de ondas espresada.......	En funcion del metro i por medio de quebrados racionales.	En funcion del *micrómetro* por medio de raices terceras.
Percepcion........	Por lo que respecta a la parte puramente subjetiva del fenómeno es claro que la percepcion se efectúa solo por medio de los órganos especiales : OIDO ; OJO Pero queda un problema fisiolójico que resolver, el que no carece de importancia, a saber: ¿En qué proporcion pueden los demas organos estar afectados por las vibraciones que producen el ruido i el colorido?	

Propiedad fundamental..........	CORRELACION	CORRELACION
Condicion especial	«Recurrencia» Si la máxima: *Bis repetita placent*, tiene aplicacion, ciertamente en ninguna parte, mejor que en la música la podemos hallar. Desde la humilde cancion hasta la sinfonía, toda obra musical ofrece esta particularidad de reproducir varias veces el mismo tema, modificado o no modificado. El placer que causa esta repeticion i su uso jeneral, no puede ménos de infundirnos ciertas dudas respecto del éxito que espera, en la aplicacion, la música dicha del Porvenir o sea de *melodía contínua*.	«Recurrencia» (?) Aunque la impresion que nos causa la repeticion de los colores no es tan marcada como la de los sonidos; sin embargo en el arte de la «*ornamentation*» vemos que la sucesion rítmica de los colores dispuestos en séries bien determinadas, produce los efectos mas gratos a la vista.

Problema comun a ambas clases de fenómenos.—¿Existen otros factores armónicos, otros intervalos a mas de los de la gama usual, otros coeficientes que los del espectro Solar?

Si se debe dar fé a lo que refieren los autores griegos i entre ellos el famoso Aristóxeno, uno de los mas prominentes intérpretes del *arte* musical, el número de los intervalos posibles es mayor de lo que creen los físicos; por ejemplo no solo los factores 7/8 11/8 son admisibles para los músicos puramente *prácticos* sino que no tienen reparo en agregar a la lista hasta quebrados irracionales.

Pero una tentativa hecha en los tiempos modernos por un músico de Berlin, para introducir el factor 7/8 ha tenido mui mal éxito, lo que nos debe inspirar alguna desconfianza respecto de las aserciones de los historiadores griegos.

I esta desconfianza parecerá tanto mas fundada cuanto que Aristóxeno, el principal promotor de la doctrina esclusivamente empírica aplicada a la música no reconocia la validez de los cálculos de los físicos.

El filólogo aleman ya citado, dice espresamente en el artículo intitulado «*Los intervalos cromáticos, segun Aristóxeno*» (1).

«Él (Aristóxeno) no admite que los intervalos musicales sean determinados por medio del cálculo, sino por la sola apreciacion del oido».

¡Qué diferencia entre el *práctico* Aristóxeno i el teórico Pythágoras!

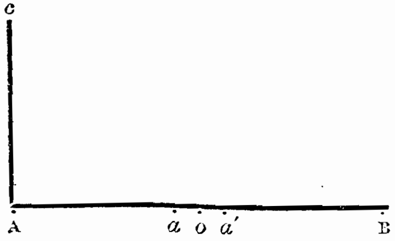
Ambos emiten una teoría, aunque el primero lo hace como Mr. Jourdain hacia prosa; pero la teoría del gran filósofo basada sobre los principios de la física es inmortal; miéntras que la asercion del empírico queda burlada por la realidad de los hechos i por la esperiencia racional.

No, la simple sensacion percibida por el oido no puede, por sí sola, dar el conocimiento exacto de las relaciones numéricas que rijen los sonidos.

Aristóxeno se encuentra haber realizado anticipadamente la hipótesis de Condillac, reduciéndose voluntariamente al papel de la estátua dotada de un solo sentido.

El problema de los factores harmónicos no puede ser resuelto satisfactoriamente sino por el estudio de la *espectroscopia;* cosa que felizmente no ofrece dificultad.

Cánon de Pythágoras modificado.—Miéntras tanto el espectro solar tal como se presenta a nuestra vista nos ofrece los medios de modificar nuestra escala musical; para lo cual podemos hacer uso del aparato imajinado por Pythágora i que lleva su nombre, pero modificado como sigue:



(2)

(1) Nicht durch Berechnung sondern durch das gehör, willer er den Unterschied den Töne bestimmt wissen.—Loc. cit.

(2) Por falta de cliché no se completa la figura.

Sea una línea horizontal A B i otra vertical A c; demos a A C el valor 0,512 (poco importa la unidad) valor que llamaremos L_0.

Supongamos que esta línea A c pueda jirar al rededor del punto A hasta coincidir con A O. Estando dicha línea A $c = L_0$ en esta última posicion es decir tendida sobre A B la levantamos hasta formar un ángulo B A $c = 27^{0}16'$ cuyo coseno$=8/9$. De la estremidad c bajemos una perpendicular sobre A B la que cae en a i tiremos otra perpendicular sobre la misma A c, hasta cortar A B en a': La distancia A a será igual a A C cos. $27^{0}16' = L_0\ 8/9$ i naturalmente la otra línea A a' tendrá por valor: A c sec $27^{0}16' = L_0\ 9/8$. De modo que reemplazando la línea A B por una cuerda de música, i formando así un monocordio como el de Pythágoras. Si colocamos un caballete sucesivamente en a i en a', producíremos el sonido *re* (sea re_3) i su correlativo si_2b 81/80.

La misma construccion pudiendo repetirse con todas las demas notas, formaremos por este procedimiento la tabla que viene a continuacion.

Si en lugar de una cuerda son dos las que se emplean simultáneamente, el aparato podrá servir para estudiar los efectos de la correlacion.

Del mismo modo para el estudio completo de la harmonía se podría dar mas ensanche al primitivo aparato; reuniendo 7 pares de cuerdas, etc., etc.

Volviendo a la primera construccion, la que da el *re*, vemos que la nota que le corresponde es el *si* b modificado por el quebrado $\frac{81}{80}$, que los músicos llaman *coma*; esta nota no existe en la música actual; pero deberia existir en virtud del principio de *correlacion*. Sin mas pormenores pasaremos a la tabla que representa la escala musical heliocromática (1).

---

(1) O gama cromática formada a imitacion de la escala de colores del espectro solar

GAMA HELIOCROMÁTICA

SIGNOS	NOTAS	COEFICIENTES	NOTAS CORRELATIVAS (1)	COEFICIENTES
L_0	*ut*$_3$	1	*ut*$_4$	$\frac{1}{2}$
L_0*	*ut**	$\frac{24}{25}$	*ut* b	$\frac{25}{48}$
L_1b	*re* b	$\frac{25}{27}$	*si* $\frac{81}{80}$	$\frac{27}{50}$
L_1	*re*	$\frac{8}{9}$	*si* b $\frac{81}{80}$	$\frac{9}{16}$
L_1*	*re**	$\frac{64}{75}$	*la* $\frac{125}{128}$	$\frac{75}{128}$
L_2b	*mi* b	$\frac{5}{6}$	*la*	$\frac{3}{5}$
L_2	*mi*	$\frac{4}{5}$	*la* b	$\frac{5}{8}$
L_2*	*mi**	$\frac{96}{125}$	*sôl* $\frac{125}{128}$	$\frac{125}{192}$
L_3b	*fa*	$\frac{3}{4}$	*sol*	$\frac{2}{3}$
L_3	*fa*	$\frac{18}{25}$	*sol* b	$\frac{25}{36}$
L_3*	*fa**	$\frac{27}{40}\ \frac{128}{125}$	*fa* $\frac{80}{81}\ \frac{135}{128}$	$\frac{20}{27}\ \frac{125}{128}$
L_4b	*sol* $\frac{81}{80}\ \frac{125}{128}$	$\frac{25}{36}\ \frac{81}{80} = \frac{45}{64}$	*fa** $\frac{80}{81}$	$\frac{18}{25}\ \frac{80}{81}$
L_4	*sol* b $\frac{81}{80}$	$\frac{27}{40}$	*fa* $\frac{80}{81}$	$\frac{20}{27}$
L_4*	*sol* $\frac{81}{80}$	$\frac{81}{125}$	*fa* b $\frac{80}{81}$	$\frac{250}{324}$
L_5b	*sol** $\frac{81}{80}$	$\frac{27}{40}\ \frac{125}{128}$	*fa* $\frac{80}{81}\ \frac{128}{125}$	$\frac{20}{27}\ \frac{128}{125}$
L_5	*sol* $\frac{81}{80}\ \frac{125}{128}$	$\frac{81}{128}$	*mi* $\frac{80}{81}$	$\frac{4}{5}\ \frac{80}{81}$
L_5*	*la* b $\frac{81}{80}$	$\frac{3}{5}\ \frac{81}{80}$	*mi* b $\frac{80}{81}$	$\frac{5}{6}\ \frac{80}{81}$
L_6b	*la* $\frac{125}{128}$	$\frac{3}{5}\ \frac{125}{128}$	*mi* b $\frac{125}{128}$	$\frac{5}{6}\ \frac{125}{128}$
L_6	*si* b $\frac{81}{80}$	$\frac{9}{16}$	*re*	$\frac{8}{9}$
L_6*	*si* $\frac{80}{81}$	$\frac{27}{50}$	*re* b	$\frac{25}{27}$
L_7b	*ut*$_4$b	$\frac{25}{48}$	*ut**	$\frac{24}{25}$
L_7	*ut*$_4$	$\frac{1}{2}$	*ut*$_3$	1

(1) Puestas a la octava superior para facilitar la comparacion.

Vemos que ademas de los factores cromáticos [24/25 i 80/81 existe un tercero: 125/128, que se repite con mucha frecuencia, i tambien representa un intervalo susceptible de ser apreciado por el oido.

Todos los sonidos de la gama usual van reproducidos, a escepcion de uno, el *si natural*, circunstancia que no puede ménos de causar sorpresa, visto el papel importante que desempeña la «*séptima*» llamada tambien la *nota sensible* por excelencia. Ademas hemos visto que el factor 8/15 puede servir de base o producto constante para formar una nueva gama. Seria de desear que algun músico enterado en la acústica buscase la esplicacion de estos hechos que parecen verdaderamente anómalos.

Conclusion.—La simple vista de la tabla que sigue puede servir de resúmen final i sin mas comentarios técnicos la entrego a las meditaciones de los adeptos de la ciencia. Pero no puedo prescindir de señalar un *hecho* imposible de conciliar con la doctrina moderna llamada positiva. Seis siglos ántes de la era moderna, el jeómetra Pythágoras descubre las relaciones numéricas de los sonidos musicales i de allí infiere que la armonía, *traducible en números*, es la lei universal a la que todo en el cosmo está subordinado; la idea es aceptada con un entusiasmo delirante por los contemporáneos del gran filósofo, es comentada i sistematizada por sus sucesores, Platon a la cabeza; i, andando el tiempo, esta idea grandiosa llega a no ser mas que un sueño metafísico. Para los modernos la «*Harmonía de las esferas celestes*» es un lindo tema poético i nada mas; hasta que la química por una parte i sobre todo los estudios espectrales vienen a dar razon, del modo mas espléndido, a los antiguos metafísicos.

Así, en un tiempo mas o ménos lejano, las utopias de los iniciadores del gran movimiento social cuyo aniversario acabamos de celebrar, llegarán a ser verdades triviales a la par que realidades benéficas, entónces principiarán a despuntar otras utopias mas enormes, ya no contento con la armonía terrestre, el hombre,—*audex Jopeti genus*—aspirará a la ciudadanía universal.