HUMBERTO GIANNINI, MANUEL VALLEJOS Y ELIANA DOBRY

Exposición Moderna de la Lógica Formal

1.° *Introducción*

Se ha solido considerar la Lógica, en diversas épocas y por diversos tratadistas, ora como "el arte de la disputa", ora como "el conjunto de normas del pensar correcto", ora como una disciplina filosófica cuya finalidad sería indicarnos las condiciones de la verdad y acercarnos a la realidad de las cosas. No se agotan aquí las distintas posiciones que se han dado a lo largo de su historia. Hoy día la Lógica, tal como aquí se estudiará, se trata como una ciencia independiente que consiste en un sistema de operaciones básicas que asegura una ampliación exacta de todo conocimiento en general. Para asegurar esta ampliación ella misma —la Lógica— deberá ser un sistema exacto.

Si se preguntara al lector cuál es una de las características de las Matemáticas, en cuanto sistema exacto, seguramente respondería que ella consiste en demostrar sus teoremas y definir sin vaguedad sus conceptos.

Pues bien, esto es lo que queremos decir, refiriéndonos a la Lógica, cuando la llamamos *sistema exacto*.

En cuanto a su finalidad (o utilidad), la Lógica es una *ciencia instrumental*. Esta característica puede asignársele a una ciencia cuando sus resultados son aplicados como herramienta o instrumento a otros conocimientos, así como en las construcciones, el andamiaje es imprescindible para levantar una casa.

"Análisis técnicos, investigaciones psicológicas, problemas económicos, críticas filosóficas, discusiones de la vida diaria y muchas otras ocasiones permiten o en varias ocasiones exigen, su aplicación".

Cuando por ejemplo formulamos esta frase: "Me voy o me quedo", u otra similar, ella plantea una alternativa, "O esto o aquello", que en el lenguaje de la Lógica se puede escribir: "p o q". La letra "p" simbolizará una frase cualquiera; la letra "q", otra. Así expresiones del tipo: "Voy al teatro o voy al fútbol", "Compraré cigarrillos o compraré bombones", etc., pueden simbolizarse siempre por "p o q", si se trata de dos disyuntos (dos frases en disyunción); "p o q o r", si son tres, etc. . .

Este ejemplo nos muestra otra característica de la Lógica: si prescindimos de lo dicho en las frases (su contenido) podemos simbolizarlas, combinarlas de determinadas maneras y, como veremos más adelante, transformarlas según leyes. Por ello decimos que la Lógica es un sistema formal.

Resumiendo lo anterior, la Lógica, tal como nosotros la trataremos, es un sistema exacto, instrumental, simbólico y formal.

Pasaremos ahora a ver brevemente las relaciones que existen entre Lógica y otras Ciencias y Disciplinas.

2.° *Lógica y Teoría del Conocimiento*

La Teoría del Conocimiento estudia los

elementos, la estructura, fundamentos y límites de todo conocimiento. Investiga en qué han de consistir la "verdad" y el "error". Por el empleo de estos conceptos tiene puntos de contactos con la Lógica. Sin embargo, como ya hemos bosquejado, la Lógica se limita a consideraciones puramente formales, es decir, a la determinación de relaciones entre frases. Por ejemplo, un teorema de la Lógica es "verdadero" porque puede derivarse de axiomas.

Trataremos de dar una idea en su forma más simple de la diferencia existente entre ambas disciplinas. Supongamos que un amigo nos relata lo siguiente: "El oculista me afirmó que si mi habitación es de color rojo, entonces me dañaré la vista". "Y, efectivamente, mi pieza es de color rojo". ¿Qué desprenderemos de esto? Si nosotros hemos escuchado con un criterio puramente lógico deberemos concluir que nuestro amigo se dañará la vista, de acuerdo con el juicio del médico y haciendo fe en él.

Otra cosa es que el oculista se equivoque. Ese problema pertenece a la Medicina y no a la Lógica. Nosotros, como lógicos, hemos aplicado simplemente un axioma para sacar una conclusión.

Algo similar ocurre entre Lógica y Teoría del conocimiento.

3.° *Lógica y Psicología*

La Psicología se ocupa, entre otros problemas, de los procesos que explican o hacen posible el fenómeno de pensar, las alteraciones que pueden producirse en su desarrollo, o en sus usos, sus eventuales causas, etc. Arguyen los psicologistas, es decir, los que pretenden colocar la Lógica como un capítulo de la Psicología, que el objeto de la Lógica son las leyes del pensamiento. Pero la Lógica no se interesa por los procesos psíquicos. Sus métodos (axiomatización y deducción) y sus resultados (teoremas) son diferentes e independientes de la psicología.

4.° *La Lógica y las Ciencias Naturales*

Las Ciencias Naturales utilizan un procedimiento muy característico que consiste en generalizar a partir de una enumeración no completa de casos (inducción). Por ejemplo: esta piedra cae, aquella piedra cae, ésa cae igualmente... entonces, *todas* las piedras caen.

Este procedimiento fué considerado durante muchos siglos como opuesto a la Lógica formal o deductiva, es decir, al procedimiento según el cual se derivan teoremas a partir de axiomas. Sin embargo, esta oposición ha dejado en parte de existir pues, hoy en día, el procedimiento inductivo puede ser tratado también de un modo formal, formando así un capítulo de la Lógica.

5.° *Lógica y Lingüística*

La lingüística es una ciencia social descriptiva que estudia las estructuras del lenguaje, sus transformaciones, su origen e influencias. Junto a ella está la gramática que impone normas para el uso correcto de una lengua determinada (castellano, francés, etc.).

La Lógica debe expresarse en un lenguaje, sea histórico (castellano e inglés, etc.), o simbólico. Este último podrá traducirse al histórico y viceversa. Ejemplo: "me voy o no me voy" que se traduce por "p o no-p".

El estudio de la estructura (formal) del lenguaje ofrece puntos de contacto entre Lógica y Lingüística. No así los aspectos históricos y específicos de cada lengua los cuales conciernen a esta última.

6.° *Lógica y Matemáticas*

"Habiendo comenzado por la Lógica Pura, me encuentro a mitad del libro, hablando de aritmética", ha dicho Russell en una de sus obras (*Los fundamentos de las matemáticas*).

Cuando antiguamente se definían las Matemáticas como ciencia de los números y cantidades era difícil concebir alguna identidad entre este sistema y la Lógica. Hoy sabemos, en cambio, que las Matemáticas comprenden ramas en las cuales no entran los elementos de número y cantidad.

Lo que más bien la caracteriza es que dadas ciertas premisas se derivan necesariamente otros teoremas. También ella es un sistema formal, exacto, simbólico. Ambas —Lógica y Matemáticas— a partir de principios o axiomas van derivando teoremas, y de éstos, otros; ambas utilizan conceptos no definidos, definiciones convencionales y hacen uso de símbolos.

La confirmación de la identidad de procedimientos entre ambos sistemas fué dada a fines del siglo XIX por Russell y Frege cuando consiguieron derivar la Aritmética a partir de la Lógica. Más tarde Pieri e Hilbert derivan las geometrías de la aritmética.

7.° *Las bases formales de un sistema exacto*

a) Decíamos antes que una de las características de un sistema exacto es que en él se definen los conceptos y se demuestren los teoremas. Pero como los teoremas se demuestran por otros y estos últimos por otros anteriores es necesario elegir una fórmula de punto de partida para todos los demás. A esta fórmula no demostrada la llamamos *axioma*. No pensemos que los axiomas sean verdades evidentes que no necesitan demostración. Se eligen convencionalmente, con la condición de que el sistema de teoremas construído a partir de ellos no conduzca a una contradicción, que sean simples y que el sistema tenga la más amplia aplicabilidad.

b) Los conceptos de un sistema exacto son definidos de una manera fija y única. Pero, para definir un concepto necesitamos de otros ya definidos, que a su vez requieren de definición, y así *ad infinitum*. También en este caso debemos partir de ciertos conceptos no definidos con la ayuda de los cuales iremos definiendo directa o indirectamente todos los conceptos restantes del sistema respectivo.

8.° *La Definición*

Para la Lógica Clásica la definición, llamada *"definición real"*, consistía en la determinación de la esencia de una cosa. Siempre que tengo ante mí, o pienso en un triángulo lo veo o concibo de tres lados. Si pretendiese pensarlo sin esta nota esencial ya no sería triángulo. Esto es lo que la Lógica Clásica llamaba esencia de una cosa y, cuando se definía algo, interesaba enunciar sus características esenciales.

Para la Lógica moderna la finalidad de las definiciones es contar con conceptos exactos, conceptos que no encierren ambigüedades.

El procedimiento de la definición es el siguiente: Se define una expresión sin significado por otra con significado, y para tal finalidad se usa el símbolo "=df" (se lee *"es definido por-"*), que se escribe entre ambas expresiones. Así se da a la primera, por convención, un significado.

Supongamos que ustedes vean en un libro de matemática la expresión *"a/b"* y que no le encuentran significación alguna. Si más adelante leen que a/b = df a : b (a/b es definido como a : b), seguramente entonces, la expresión anterior tendrá un significado, pues ustedes conocen la significación del símbolo " : ".

En vez de pretender decir lo que el objeto es en la realidad, la Lógica Moderna establece que tal expresión sin significación será bautizada por tal símbolo o combinación de símbolos, de tal suerte que adquirirá un significado y ella a su vez podrá servir para dárselo a otra.

Si la expresión *"fufa"*, sin significado, acordamos definirla convencionalmente como *"plátanos a la salse verde"*, esta definición no será ni verdadera ni falsa, pero adquirirá significación por la definición misma, que será como su bautizo.

Hemos señalado ya que cada expresión sin significado se define por otras que lo tienen, pero éstas a su vez lo reciben de otras y así, tenemos que llegar a conceptos que no se definen; éstos han sido convencionalmente elegidos.

En el ámbito de este sistema exacto únicamente los conceptos no definidos, declarados como tales, y todos los conceptos exactamente definidos a partir de aquéllos, poseen una significación.

En general las condiciones de una definición convencional son las siguientes:

a) Para cada nueva expresión se utiliza un nuevo símbolo. b) La expresión que define contiene únicamente conceptos ya definidos exactamente o conceptos no definidos, pero declarados como tales. Se definen los términos, las palabras, no las cosas. En la fórmula V = df s/t lo que se define es el término "velocidad", no la velocidad misma.

9.º *Niveles del lenguaje*

Las ciencias pueden ser expresadas o comunicadas ora por el lenguaje común —los llamados idiomas históricos como el castellano, el francés, italiano—, ora en un lenguaje simbólico como el álgebra. Tanto al uno como al otro se les llama primario, cuando no se utilizan para hablar sobre otro lenguaje o sobre ellos mismos.

Sin embargo, a menudo necesitamos referirnos a un lenguaje y, en este caso se dice que hablamos en *"metalenguaje"* con respecto al primero.

Por ejemplo, consideremos estas dos frases:

a) me comí un caballo.

b) La expresión "me comí un caballo" es propia de ajedrecistas.

Dado que en la segunda hablamos sobre la primera, se dice que es una frase en metalenguaje con respecto a la primera que estaría en lenguaje primario.

Pero también podemos hablar a su vez sobre la frase que está en metalenguaje como por ejemplo:

La expresión "me comí un caballo" es de ajedrecistas" es una frase no siempre verdadera.

Siguiendo de esta manera obtendríamos una serie de lenguajes, o, como se les llama, *niveles del lenguaje*. Imagínense ustedes que hay tres personas en fila y que cada una deba enjuiciar lo que dijo la anterior o, de otro modo, que cada una se refiera con sus frases al lenguaje de la que le antecede. En vez de tres pueden ser muchas personas, por lo que el nivel del lenguaje irá haciéndose más y más alto respecto al lenguaje primario, que en nuestro ejemplo estará representado por el primero que dijo "me comí un caballo".

La teoría de los niveles del lenguaje está basada en el siguiente principio: Lo que se refiere a un mismo lenguaje como tal no debe expresarse en el mismo lenguaje, es decir, podemos usar el mismo idioma, pero debemos considerarlo como otro (nivel de) lenguaje. En efecto, es necesario, en primer lugar, distinguir el símbolo de lo simbolizado. Para simbolizar algo se precisa de un símbolo; pero para simbolizar el símbolo mismo no se debe usar éste, sino recurrir a un nuevo símbolo (que podría ser el mismo escrito entre comillas). Este nuevo símbolo pertenece a un metalenguaje con respecto al lenguaje primario al cual pertenece el primer símbolo.

El principio a que nos referimos permite resolver, entre otras, ciertas contradicciones que la Lógica Clásica llamó paradojas.

10. *Verdad y valencia*

Las ciencias exactas trabajan sólo con frases significativas y con expresiones simbólicas significativas. La frase "el hijo gota arriba tener" y la expresión simbólica "$= 3 + + 1.0 + = 7 +$" son no significativas, carentes de sentido.

En cambio la frase "el sombrero está afuera" es significativa y, según la Lógica Clásica, puede ser verdadera o falsa.

La Lógica Simbólica llama a "verdad" y "falsedad" valores veritativos. Así, si una proposición es verdadera tiene el valor veritativo "verdad", y si es falsa el valor veritativo "falsedad".

Una Lógica, como la Clásica, que tiene dos valores veritativos se llama bivalente. Pero de hecho se construyen otras lógicas con 3 (verdadero, indeterminado, falso) 4.5 . . . o infinitos valores veritativos (lógicas tri, tetra, pentavalente).

11. *El concepto*

El concepto es la unidad fundamental de un sistema formal; el concepto sirve para designar los objetos de la Lógica, pero es distinto de ellos.

El objeto de la Lógica es, por otra parte, lo designado por el concepto y la Lógica no se pregunta si los objetos son ó no objetos reales.

12. *El Juicio*

La Lógica Clásica consideró el juicio como un acto mental declarativo correlacionado con una proposición. Como tal no es materia de la Lógica y en su lugar se prefiere usar hoy los términos de "proposición" y "frase" respectivamente. Nosotros hemos empleado varias veces el término *"juicio"* como sinónimo de "frase".

Hemos visto que los conceptos designan objetos de la Lógica. Las frases igualmente designan algo que son las proposiciones.

13. *Raciocinio*

Consideremos la expresión siguiente llamada "raciocinio":

"Si todos los chilenos son americanos y todos los santiaguinos son chilenos, entonces, todos los santiaguinos son americanos".

El concepto de raciocinio podemos entenderlo como una expresión del tipo "si . . ., entonces, . . ." Las frases (una o más) que siguen al condicional "si" se llaman premisas; las frases (generalmente una) que sigue al "entonces" se llama conclusión.

El raciocinio puede escribirse también como secuencia de frases, separando las premisas de la conclusión por una raya horizontal:

$$\begin{array}{ll} a \supset b & \\ & \textit{Premisas} \\ a \supset c & \\ \hline a \supset c & \textit{Conclusión} \end{array}$$

Para que un raciocinio sea exacto es necesario que las premisas sean axiomas o teoremas de la Lógica y/o que la conclusión se haya obtenido de las premisas usando ciertas reglas establecidas por la Lógica.

HISTORIA DE LA LOGICA

La preocupación por la Lógica nació casi paralelamente en India y Grecia.

Por el siglo V a. de C. Heráclito y los Eleatas creen encontrar una legitimidad común entre el ser de las cosas y el pensamiento que trata de aprehenderlas. Zenón, preocupado de demostrar que lo que es impensable es a su vez irreal, crea una técnica de refutación denominada dialéctica.

Los sofistas se jactan de dominar el lenguaje y de utilizarlo para triunfar sobre sus adversarios; ellos, entonces, saben bien manejar los hilos lógicos y retóricos de las palabras para refutar y demostrar o convencer. Hay un uso práctico de raciocinios, pero no una reflexión sobre ellos. Sócrates, contemporáneo de los sofistas, afirma la posibilidad en la intelección de los conceptos. Crea un método —la indución socrática— cuya mira es la definición conceptual.

Platón, el más genial discípulo de Sócrates, alcanza gran importancia en la Lógica. Reflexiona sobre el procedimiento de razonar. Crea un método para conducir la inteligencia hacia la verdad. Es la definición y la división como momentos de la dialéctica.

Pero quien construye un sólido cuerpo del acervo de los conocimientos Lógicos anteriores y de sus propias y monumentales investigaciones es Aristóteles, en sus cinco libros comprendidos bajo el nombre de *Organón.* Por muchos siglos la obra del estagirita será el punto de referencia de toda la Lógica (fué traducida al latín por Boecio en el siglo V d. de C.). Su contribución más importante es la formulación de la teoría del silogismo categórico que veremos más adelante. Además formuló axiomas muy importantes de la Lógica Clásica como son los principios de contradicción y tercero excluído; analizó lo que debe ser la definición y la clasificación, y ya encontramos en sus libros algunos símbolos para ciertos conceptos, etc.

A los estoicos se debe el estudio especial de frases compuestas y de raciocinios. El Medievo se caracteriza por la elaboración de la teoría de las "suposiciones" que corresponde hasta cierto grado a la teoría de los "niveles del lenguaje". En el siglo XIV aparecio el libro de Raimundo Lullio, *Ars Magna,* cuya intención es la de traducir el lenguaje común a combinaciones simbólicas. En este sentido es propulsor de la Lógica Simbólica.

Pero el lógico más importante de la alta Edad Media es Guillermo de Occan. Entre muchos otros raciocinios formuló las llamadas leyes de De Morgan que cinco siglos más tarde e independientemente del primero, éste descubre.

Por aquel tiempo, y al abrirse el período renacentista se acrecentó el interés por la elaboración rigurosa de una Lógica de la inducción como método de las ciencias naturales que en este tiempo era opuesta a la Lógica Formal.

Leibniz intentó, como antes Lullio, la creación de un lenguaje científico universal que permitiese la resolución de todos los conceptos compuestos en conceptos más simples.

Su segunda contribución es la idea de un cálculo de razonamiento que consistía en un tipo de deducción mecánica similar a la que caracteriza a las matemáticas. Todas estas tentativas son muy significativas: La Lógica va siendo poco a poco oficio de científicos, especialmente de matemáticos.

En el siglo XIX Hamilton consiguió por un artificio especial la llamada *cuantificación del predicado* mediante la cual ciertas frases podrían tratarse como ecuaciones. De Morgan investigó raciocinios especiales que la Lógica Clásica no trató. Con Boole se inició la formación propiamente dicha de la Lógica Simbólica; él introdujo el producto Lógico, la suma Lógica, etc.

Frege utilizó la Lógica Simbólica para desarrollar la aritmética en forma más rigurosa y efectuó el primer gran análisis de las matemáticas. Peano analizó el proceso de demostración en las matemáticas por medio de la Lógica. Whitehead y Russell dedujeron la Aritmética a partir de la Lógica, es decir, los teoremas de aquélla a partir de los axiomas de ésta. La "teoría de los tipos" de Russell dió explicación a ciertas paradojas (contradicciones aparentes).

Jan Lukasiewicz agregó las Lógicas Trivalentes y luego, junto con Tarski, las Lógicas de infinitos valores. Hilbert investigó la fundamentación de la Lógica misma y formuló las condiciones que debe cumplir un sistema formal para ser exacto demostrando, como ya antes Post, que la parte elemental de la Lógica es libre de contradicción.

En esta rápida ojeada hecha a la historia de la Lógica hemos omitido muchos nombres, algunos muy importantes. Nuestro propósito ha sido solamente señalar al sentido que ha tomado la investigación Lógica a través de su historia.

EL CALCULO DE PROPOSICIONES

1.º *Simbolización, Conceptos y Definiciones*

En este capítulo se explicarán los principales procedimientos necesarios para conocer cuándo cierto conjunto de frases es verdadero o falso.

Se habla de cálculo porque en forma semejante a la geometría y en general, a las matemáticas, nos encontramos con axiomas y teoremas. En el cálculo de proposiciones se tendrá un procedimiento que nos permitirá calcular si cierta combinación de frases es verdadera o falsa.

Es necesario tener presente que en este capítulo se estudian las proposiciones como enteras, es decir, no se analizan considerando sus diversas partes. Si tenemos una frase, "Asia es el continente más grande", no veremos sus distintas partes, "Asia", "es" "el continente más grande", sino que dirigiremos la atención a la frase entera.

Simbolizaremos las frases con letras minúsculas como "p", "q", "r", etc. Ahora bien, si tenemos, por ejemplo, la proposición, "El rey de Chile es joven", simbolizada por "p" la expresión simbólica "—p" será la misma proposición negada: "No es el caso que el rey de Chile es joven".

En general, si "q" es cualquier frase, la misma proposición negada se simboliza anteponiendo a "q" el *símbolo de la negación* "—". Este, junto con otro que veremos luego, son los únicos *conceptos no definidos* del cálculo de proposiciones.

Ahora "—q" se lee "no es el caso que q", o simplemente "no q". Sin embargo, en nuestro ejemplo anterior, las frases "El rey de Chile *no* es joven", y "No es el caso que el rey de Chile es joven" no expresan lo mismo. En efecto, según veremos más adelante, si p es una frase falsa —como lo es q en nuestro ejemplo—, "—p" debe ser verdadera. Pero si traducimos "—q" por "El rey de Chile no es joven", esta frase sigue siendo falsa ya que "El rey de Chile" no existe. Para evitar esta dificultad, que se presenta siempre en frases con sujetos singulares que no existen, es preferible usar la forma "No es el caso que..." para negar correctamente una frase dada.

Es necesario aclarar, con relación a lo dicho, lo que debe entenderse por *existencia* en lógica formal, donde esta palabra tiene un sentido distinto al que le damos comúnmente. Así, diremos que "algo" existe, si este "algo" *pertenece al campo de aplicación de la lógica*. En el cálculo de clases tendremos ocasión de aclarar más este concepto.

El otro concepto no definido es la *disyunción* "v", que se traduce en el lenguaje común por "o". "Cervantes fué gran escritor" o "Cervantes fué un músico". Se simbolizará por "pvq". También pueden estar unidas por la disyunción frases que no tengan entre sí unidad de sentido. "El sol es más grande que la tierra o los árboles son vegetales o no es el caso que la ballena es mamífero", "pvqv-s".

El símbolo "v" tiene un carácter no exclusivo, es decir, que se pueden afirmar las dos frases que están a ambos lados del símbolo. En el lenguaje común ocurre con cierta frecuencia. Si dos testigos hacen declaraciones contrarias ante un juez, se puede decir: "El testigo A no dice la verdad o el testigo B no dice la verdad o tal vez ambos no dicen la verdad". En este caso el "o" no es exclusivo. Sin embargo, lo más frecuente es que sea exclusivo; hay que tomar una frase o la otra: "Juan nació en Valparaíso o Juan nació en Santiago"; "Juan está vivo o Juan está muerto". Podemos abreviar diciendo "Juan está vivo o muerto"; casi siempre cuando se trata de dos frases con el mismo sujeto.

Los conceptos que se introducen ahora se definen, como veremos, con ayuda de los anteriores.

La conjunción.—" · ". "Haendel fué un músico del siglo XVIII y nació en Halle". Se simboliza "p · q", se lee "p y q". "p · —q" será "Haendel fué un músico del siglo XVIII y no es el caso que nació en Halle". También se pueden unir frases que no tengan entre sí nada en común; "el agua de mar es salada (r) y Napoleón murió en Santa Elena (s)": "r · s".

La implicación.—" ⊃ ". "Si los libros son caros (p), entonces los libreros se harán ricos (q)". Se simboliza "p ⊃ q". La expresión se puede leer "si p, entonces q" o bien "p implica q". También pueden estar implicadas, unidas por el signo de la implicación, frases muy diversas: "Si el agua de mar es salada entonces Napoleón murió en Santa Elena".

La equivalencia.—" ≡ "."p ≡ q" se lee "si p entonces y sólo entonces q" o bien "p cuando y solamente cuando q". Expresiones de esta índole son menos común en el lenguaje corriente. Así por ejemplo: "Si los cerezos no tienen hojas, entonces y sólo entonces estamos en invierno", es una expresión que establece una equivalencia entre "Los cerezos no tienen hojas" (p) y "Estamos en invierno" (q). El uso de la equivalencia es más frecuente en matemáticas: "Si a > b entonces y sólo entonces a-b es positivo".

En el álgebra se emplean paréntesis para determinar el alcance de los signos. (3 + 5) x 2 = 2 x 3 + 5 · 2 = 16. En el primer caso el signo + afecta a 3 y 5 debido al paréntesis; en el segundo caso afecta solamente al dos. Cuando los signos son más numerosos y las operaciones más complejas se usan no sólo paréntesis redondos, sino también cuadrados y paréntesis de llave. En la lógica simbólica se trabaja con los mismos paréntesis y en el mismo sentido: — (pvq), —pvq. En el primer caso la negación afecta a todas las dos expresiones que están dentro del paréntesis, es decir, a "p" y "q". En el segundo caso sólo afecta a "p".

Vamos a definir ahora los tres conceptos anteriores " · ", " ⊃ " y " ≡ ", con ayuda de los conceptos no definidos "—" y "v".

"p · q" = df — (—p v q). En el ejemplo dado se tiene, "Haendel fué un músico del siglo XVIII y nació en Halle" se define "no es el caso que Haendel no fué un músico del siglo XVIII o que no nació en Halle".

"p ⊃ q"= df — p v q". "Si los libros son caros entonces los libreros se harán ricos" se define "No es el caso que los libreros se harán ricos o que los libros son caros".

p ≡ q =df (p ⊃ q) · (q ⊃ p). "Si los cerezos no tienen hojas, entonces y sólo entonces estamos en invierno" se define "si los árboles no tienen hojas entonces estamos en invierno y si estamos en invierno, entonces los árboles no tienen hojas".

Es muy importante recordar que la definición no es sino una abreviación. Es por ello que siempre se puede substituir una expresión por su definición correspondiente. Si tenemos "p ⊃ q" podemos reemplazarla colocando " —pvq". Del mismo modo, expresiones que contienen " ⊃ " o " · ", pueden siempre reemplazarse por expresiones que contienen sólo " — " y " v ".

2.º *Teoremas*

Empleando los conceptos anteriores y a partir de cuatro axiomas, y dos reglas axiomáticas, que no indicaremos, se deducen luego todos los teoremas del cálculo de proposiciones. Estos teoremas son expresiones simbólicas en las cuales dos o más símbolos proposicionales son unidos entre sí por los conceptos que hemos considerado. Así, se demuestra, que expresiones como "— (p · —p) o (p v — p), (p ⊃ p)", son teoremas.

La importancia fundamental de los teoremas reside en el hecho de que se trata de expresiones que son *siempre verdaderas* cualquiera que sea el significado de las frases "p", "q", "r", etc., que figuren en el teorema de que se trate. Decimos, por eso, que *un teorema tiene siempre el valor veritativo verdad* independientemente de los valores veritativos (verdad o falsedad) de las frases que en él figuren.

Pero, ¿cómo podemos conocer el valor veritativo de una frase aislada? ¿Cómo podemos saber, por ejemplo, de que la frase "Todos los cuerpos son pesados" es verdadera o falsa? Este problema no corresponde a la lógica. Es la física la ciencia que debe decidir en este caso. La lógica sólo puede asegurarnos de que ciertas combinaciones entre frases son siempre verdaderas (teoremas) o, si no se trata de un teorema, que puede ser verdadera según el valor veritativo que asignemos a cada frase.

Ahora bien, el hecho de que los teoremas son siempre verdaderos no constituye una propiedad misteriosa, sino que de hecho se demuestra que esto es así, siempre que entendamos por "verdad" y "falsedad" lo siguiente:

1.º *Una expresión "— p" es verdadera o falsa según que — p sea falsa o verdadera.* Es decir, si la física, por ejemplo, dice que "q" es falsa, entonces la lógica afirma que "— q" debe ser verdadera.

2.º *La expresión "pvq" es verdadera siempre que tanto "p" como "q" no sean ambas falsas.*

Expresiones como "p · q", "p v q", no son teoremas. Su valor veritativo depende del valor de "p" y "q" respectivamente de acuerdo con la convención que, según lo recientemente dicho, se ha adoptado para definir el valor veritativo de las expresiones " — p" y "pvq". Así se demuestra que "p · q" es verdad sólo y solamente si "p" y "q" son ambas verdaderas. "p ⊃ q" es falso, sólo y solamente si "p" es verdad y "q" es falso. "p ≡ q" es verdad siempre que "p" y "q" tengan el mismo valor veritativo.

Vamos a enunciar ahora, sin demostración, ya que para ello necesitaríamos los axiomas, algunos teoremas importantes del cálculo de proposiciones. Así, consideremos en primer lugar el *Teorema de la Contradicción*:

$$-(p \cdot -p)$$

Dado que, según hemos visto, "p · q" es sólo verdad si tanto "p" como "q" son verdaderas, y como "p" y "—p" no pueden ser al mismo tiempo verdaderas, tenemos pues que "p · — p" es siempre falso. Es así como — (p · — p) será siempre verdad, de acuerdo con la interpretación que la lógica formal da a los conceptos "—" y " · ". Esto es lo que expresa el teorema de la contradicción: "No es el caso (—) que dos frases (p y — p) de las cuales una es la negación de la otra, sean ambas verdaderas".

Pero dos frases, siendo una la negación de la otra, tampoco pueden ser ambas falsas: Esta condición es expresada por el *Teorema del Tercero Excluído* que se simboliza por:

$$p \vee - p$$

Por ejemplo: "llueve, o no es el caso que llueve" (llueve o no llueve), es una expresión que es siempre verdadera.

Otro teorema importante es el *Teorema de la doble negación*:

$$-(-p) \equiv p$$

Según este teorema, negar una frase dos veces equivale a afirmarla. Por ejemplo: "No es el caso que este triángulo no tiene tres lados" es equivalente a "Este triángulo tiene tres lados".

Teoremas de la conmutación.—Según estos teoremas se puede cambiar el orden de las proposiciones siempre que estén unidas por " · ", "v", " ≡ ":

"La tierra gira alrededor del sol y los planetas describen curvas elípticas" es equivalente a "los planetas describen curvas elípticas y la tierra gira alrededor del sol". Lo mismo tendremos para proposiciones que estén unidas por la disyunción o la equivalencia. Según estos teoremas se puede cambiar el orden indistintamente.

También podemos asociar diversas proposiciones siempre que están unidas por: " · " o por " v ". Esto es así según el *teorema* asociativo.

$$[(p \vee q) \vee r] - [pvqvr]$$
$$[(p \cdot q) \cdot r] - [p \cdot q \cdot r]$$

La condición de conmutación y asociación es la misma que ofrece el álgebra.

Ejemplos:

El teorema de idempotencia.— "p v p ≡ p". Si tenemos frases como "Napoleón vivió en el siglo XIX o Napoleón vivió en el siglo XIX", simbolizadas por "pvp" podemos escribir solamente "p". Aunque esto parezca inútil tiene aplicación cuando se tiene una expresión que contiene algunas proposiciones que se repiten y que están unidas por "v". Si se tiene "pvqvqvp · q" podemos escribir "pvq · q" suprimiendo las frases que estén repetidas y unidas por "v". Lo que resulte después de haber suprimido esas frases es equivalente a lo que se tenía anteriormente. El mismo teorema es válido para la conjunción: "$p \cdot p \equiv p$".

Los teoremas de De Morgan.—Afirman que la negación de la conjunción y de la disyunción de dos frases, son equivalentes respectivamente a la disyunción y conjunción de las mismas proposiciones negadas individualmente.

$$-(p \cdot q) \equiv -p \vee -q$$
$$-(p \vee q) \equiv -p \cdot -q$$

"No es el caso que Alemania es un país despoblado y Suiza un país extenso" es equivalente a "Alemania no es un país despoblado o Suiza no es un país extenso". "No es el caso que, Alemania es una despoblado o Suiza un país extenso" es equivalente a "Alemania no es un país despoblado y Suiza no es un país extenso". Estos teoremas permiten substituir una expresión con paréntesis por otra sin paréntesis.

3.° *La Decisión*

Hemos dicho anteriormente que la lógica no se pronuncia sobre la verdad o falsedad de un símbolo proposicional aislado, sino que sólo puede garantizar si ciertas expresiones complejas son siempre verdaderas (teoremas), o bajo qué condiciones otras, que no son teoremas, pueden ser verdaderas. Para resolver este problema, la lógica recurre a un conjunto de procedimientos que permiten transformar expresiones. Este método se llama *decisión.*

Así como en el álgebra resolvemos una ecuación para encontrar el valor de su incógnita, así en lógica decidimos una expresión para encontrar su valor veritativo. En el álgebra simplificamos la ecuación y despejamos la incógnita; en lógica también debemos simplificar la expresión cuyo valor veritativo queremos decidir. Llamamos *forma normal* a las expresiones lógicas simplificadas. Una de las más importantes es la *forma normal conjuntiva,* que contiene sólo conjunciones como operación mayor (la que afecta al paréntesis) y disyunciones que afectan a proposiciones simples o a sus negadas. Ejemplos:

$$p \vee q$$
$$(p \vee q) \cdot (r \vee -q) \cdot (-s \vee -p)$$

Estas son dos expresiones en forma normal conjuntiva. Símbolos como "$\equiv$", o "$\supset$", o negaciones que afectan a más de una proposición no deben aparecer. Hemos visto que estas últimas se pueden eliminar mediante los teoremas de Morgan y el teorema de la doble negación, mientras que "$\supset$" y "$\equiv$" pueden substituirse por sus definiciones en que aparecen sólo "v" y "$-$". Mediante el conocimiento de los axiomas y otros teoremas que no hemos tratado, es siempre posible transformar cualquier expresión a su forma normal y conjuntiva.

Supongamos, por ejemplo, que en un texto de filosofía nos encontramos con un raciocinio complejo, y queremos saber bajo qué condiciones sería verdadero. Para ello lo simbolizamos,

sea:

$$-[(-p \cdot p) \vee -(-q \vee p)]$$

la definición de "$\cdot$" nos da:

$$-(-p \cdot p) \cdot (-q \vee p)$$

aplicando el teorema de De Morgan al primer paréntesis:

$$(--p \vee -p) \cdot (-q \vee p)$$

aplicando el teorema de la doble negación:

$$(p \vee - p) \cdot (- q \vee p)$$

Esta es una forma normal conjuntiva.

Ahora bien, se demuestra en general que *una forma normal conjuntiva es verdad, si cada expresión entre paréntesis es verdad.* En nuestro ejemplo la expresión del primer paréntesis "pv — p" es el teorema del tercero excluído y por lo tanto siempre verdad. El valor veritativo de la expresión del segundo paréntesis " — q v p" es falso si q es verdad y p es falso. Por lo tanto la expresión no es siempre verdadera. En esto consiste la decisión.

Ejercicios:

Traducir al lenguaje común si "p" significa "la torre de Eiffel está en París" y "q", "la torre de Eiffel está en Londres".

$$p \cdot - q$$
$$- p \cdot q$$

Si "p" significa "China es un país extenso"; "q" "Suiza es un país montañoso"; "r" "el Everest es el monte más alto del mundo":

$$p \,.\, q \,.\, r$$
$$p \supset (q \vee r)$$
$$(q \,.\, r) \supset p$$

Simbolizar:

"Si China es un país extenso, entonces no es el caso que Suiza es un país montañoso".

"Si Suiza es un país montañoso, entonces no es el caso que el Everest es el monte más alto del mundo y no es el caso que China es un país extenso".

"Si Suiza es un país montañoso, entonces y sólo entonces, el Everest es el monte más alto del mundo".

CALCULO DE CLASES

1.º *Elementos, Clases y Subclase*

Supongamos que visitan ustedes una exposición de flores, ubicadas según su color. Podemos decir entonces que la colección de flores blancas constituye una clase, de flores rojas otra... y así sucesivamente hasta abarcar todas las flores. Tomando otro ejemplo, imagínense en el campo frente a diferentes tipos de animales. Todas las ovejas constituirán una clase, todas las vacas otra, los caballos una tercera, etc.

Simbolizaremos una clase por medio de las letras mayúsculas:

A, B, C, D ... ...

Y los elementos de las diferentes clases por las letras minúsculas:

x, y, z. ... ...

Escribimos $x \in A$

toda vez que x sea un elemento de la clase A. Así, si A es la clase de los Liceos de Santiago, y x el Liceo N.º 3 diríamos que $x \in A$. O, para tomar el ejemplo del comienzo si B es la clase de las flores blancas e "y" una cala, escribimos "y e B". También podría darse el caso de que B representara por ejemplo, la clase de las flores rojas y "x", siempre una cala; entonces x no sería un elemento de B. Esto se simboliza por: $x - \in B$. Del mismo modo, si A es la clase de las ovejas, y "x" aquella vaca determinada, escribimos: $x - \in A$.

Pero detengámonos todavía en A, es decir, en la clase de las ovejas. Sucede que muchas de ellas tienen un manchón negro en el lomo. Constituyen la clase de las ovejas con un manchón negro, la que llamaremos C. De esta manera cualquier elemento de C es al mismo tiempo elemento de A, ya que todas las ovejas con una mancha negra son al mismo tiempo simplemente ovejas. Decimos, en este caso, que C es una *subclase* de A; en símbolos: $C \subset A$.

Pasemos a otro caso: Sea A la clase de todos los profesores del liceo, y B la clase de los extranjeros. Podemos entonces formar una tercera clase de todos aquellos individuos, que a la vez son profesores y extranjeros; es decir, la clase de los profesores extranjeros. Esta clase constituye la *intersección* de A y de B, que simbolizamos por:

$$A \cap B$$

Luego la intersección de A y B es la clase de todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B. Siguiendo con nuestro ejemplo (A : clase de los profesores; B : clase de los extranjeros), podemos también formar la clase de todas aquellas personas que son o profesores o extranjeros. A ésta la llamaremos la *unión* de A y B, que simbolizaremos por: $A \cup B$.

La unión de A y B es la clase de los elementos que pertenecen a A o B. Así por ejemplo; si A es la clase de todos los individuos del sexo masculino y B la clase de aquellos del sexo femenino, $A \cup B$ es entonces la clase de los seres humanos.

Tomemos nuevamente nuestro A como la clase de todos los profesores de liceo. Podemos formar una clase constituída por todo lo que no sea profesor de liceo (flor, casa, perro, números, o lo que sea). A ésta la llamaremos la *negación* de A, que simbolizamos por:

$$-A$$

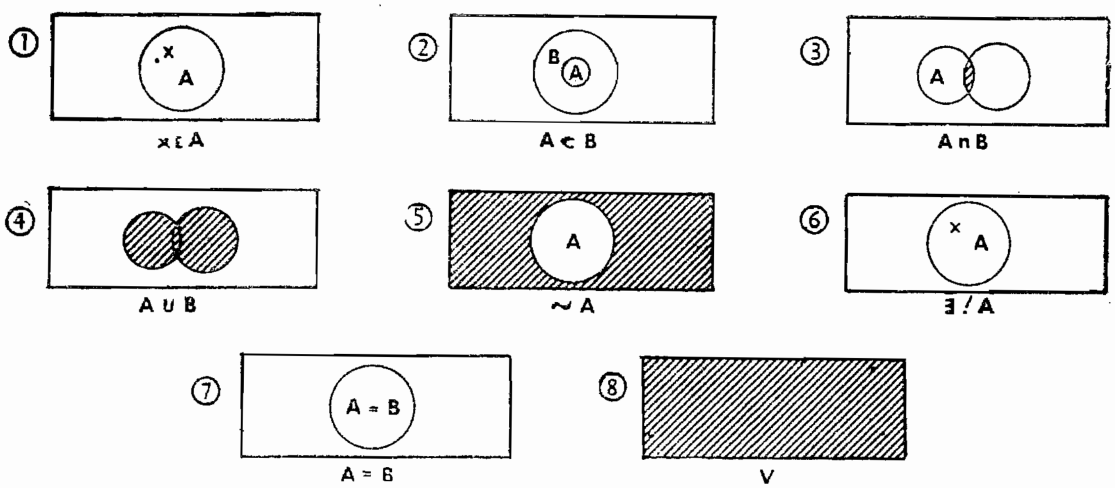
Sea ahora A la clase de los paralelogramos y B la clase de los cuadriláteros con dos pares de lados paralelos. Si tomamos el paralelogramo x, podemos entonces decir que pertenece a la clase A; o, tendremos $x \in A$. Pero, por otra parte, siendo todo paralelogramo un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos, también es x elemento de B. Lo mismo sucederá para cualquier paralelogramo x, y, z. Es decir, todos los elementos de A son elementos de B, y todos los elementos de B, son elementos de A. Decimos en este caso que las clases A y B son *iguales;* en símbolos: $A = B$.

Sabemos que en el mundo que nos rodea tenemos que vernos con casas, ríos; personas, números y así sucesivamente. Este mundo de todas las cosas constituye la *clase universal* que denotamos por V.

Pero la clase universal no es única. Los elementos que ella contiene, si bien son siempre *todos* los elementos, dependen del "mundo" que se considere. Así el "mundo" del físico (Vfísico) es distinto del "mundo" del poeta (Vpoeta), pues mientras que las "hadas" son elementos de Vpoeta, no lo son de Vfísico.

Consideremos ahora la clase de "los perros que estudian con nosotros en el Liceo", o la clase de "los diputados que a la vez son diputados y senadores". Evidentemente estas clases no contienen elementos. En general, una clase que no contiene elementos es llamada *clase vacía* y denotada por Λ. Ahora, si queremos indicar que cierta clase A *no* es vacía, es decir, que A contiene por lo menos un elemento, entonces escribimos $\exists!\ A$

Veremos ahora cómo todo lo que hemos explicado puede ser representado gráficamente por medio de sencillas figuras geométricas. Esto se hace de la siguiente manera: la colección de todo lo que entra dentro del mundo en el cual trabajamos (V) estará representada por un rectángulo. Cada clase (A, B, C . . .) la representaremos por un círculo y cada elemento (x, y, z) por un punto. Así tendremos:



1) El círculo representa toda la clase A; el punto un elemento x; por lo tanto, es elemento de A.
2) A (el círculo más pequeño) es una subclase de B (el círculo grande). Es decir, todo elemento de A lo es también de B.
3) La parte rayada nos señala todos aquellos elementos que entran tanto en el círculo que es A como en aquél que es B. Por lo tanto es la clase de los elementos que son a la vez elementos de A y de B: A ∩ B.
4) La parte rayada nos señala todos aquellos elementos que pertenecen o al círculo que es A o aquél que es B. Por lo tanto es la clase de aquellos elementos que son elementos de A o de B: A U B.
5) La parte rayada nos señala todos aquellos elementos que no entran en la clase A. Por lo tanto es negación de la clase A: — A.
6) Esta figura nos está señalando que A es una clase no vacía, ya que contiene por lo menos el elemento x: ∃! A
7) En esta figura, el círculo que representa a A coincide exactamente con el que representa a B. Por lo tanto nos está señalando que todos los elementos de A son elementos de B y todos los elementos de B son elementos de A: A = B.
8) En esta figura la parte rayada, es decir, la totalidad del rectángulo, nos señala la totalidad del mundo específico del cual nos ocupamos. Representa por lo tanto la clase universal: V.

2.º *Teoremas*

Vamos a considerar, ahora, algunas propiedades de los conceptos introducidos. Tomemos, nuevamente, nuestra clase A como la clase de los profesores y B como aquella de los extranjeros y formemos la clase de aquellos individuos que pertenecen tanto a A como a B: A ∩ B; es decir, la clase de los profesores extranjeros. Es evidente que esta clase será la misma que resulte de formar B∩A, es decir, la clase de los extranjeros profesores, de aquellos individuos que a la vez son extranjeros y profesores. Según lo que hemos visto acerca de la igualdad de clases, podemos escribir:

A ∩ B = B ∩ A (conmutatividad de la intersección).

Siguiendo con nuestros mismos A y B, formemos ahora la clase de aquellos individuos que son o profesores o extranjeros, como ya sabemos: A U B. También es fácil darse cuenta que esta clase será la misma que aquella que resulte de formar B U A, es decir, la clase de aquellos individuos que son o extranjeros o profesores. Luego:

A U B = B U A (conmutatividad de la unión).

Pero sigamos con nuestra A. Sabemos que — A es la clase de todo lo que no es profesor, es decir, la clase de los no-profesores. Podemos ahora formar la clase de todo lo que *no* sea — A, es decir, la clase de los que no son no-profesores:

— — A

Esta será la clase de los profesores ya que todo lo que no es no-profesor es necesariamente profesor. Luego, tenemos:

$$- - A = A$$

3.º *Juicios*

Consideremos, ahora, los siguientes juicios (frases): "Todos los hombres son mortales" o "Todas las luces están apagadas" o "Ningún hombre es de vidrio"; en estos ejemplos nos estamos refiriendo al total de las clases de los hombres; al total de las clases de las luces y al total de las clases de aquellos individuos que no son hombres. Siempre que en un juicio afirmemos o negamos algo sobre la totalidad de los elementos de una clase, diremos que se trata de un *juicio universal*, afirmativo o negativo según el caso. Para distinguirlos simbolizamos los juicios universales afirmativos por **a** y los juicios universales negativos por **e**. Tomemos entonces el juicio universal afirmativo: "Todos los hombres son mortales". Si A representa la clase de los hombres y B la clase de las cosas mortales, tendremos por lo tanto que todo elemento de A (es decir, todo hombre determinado) es también elemento de B, es decir:

$A \subset B$ (juicio universal afirmativo)

Veamos el juicio universal negativo: "Ningún hombre es de vidrio". Es evidente que en lugar de esto podemos decir: "Todos los hombres son no de vidrios". Entonces si A representa la clase de los hombres, B la clase de los objetos de vidrio, y por lo tanto — B la clase de todo lo que no es de vidrio, tendremos que cualquier elemento de A es a la vez elemento de — B, es decir:

$A \subset -B$ (juicio universal negativo)

Pero no siempre hablan ustedes, de todos los hombres, de todas las luces, etc. También pueden referirse a algunos hombres o a algunas luces, afirmando o negando algo de ellas. Se trata entonces de *juicios particulares afirmativos* que se simbolizan por **i** y de *juicios particulares negativos,* **o**.

Tomemos el juicio particular afirmativo: "Algunos alumnos son ordenados". Esto equivale a decir: "Hay individuos que son a la vez alumnos y ordenados", es decir "la clase de los alumnos ordenados es una clase no vacía". Ahora, si A es la clase de los alumnos y B aquella de los individuos ordenados, sabemos que la clase de los alumnos ordenados será la intersección de A y B:

$$A \cap B$$

Y para expresar el hecho de que efectivamente hay alumnos ordenados ponemos:

$\exists!\ A \cap B$ (juicio particular afirmativo **i**)

También podríamos decir: "Algunos alumnos no son ordenados", con lo que tendríamos un juicio particular negativo. La clase de todo lo que no es ordenado sería como ya sabemos — B; y la clase de todos los individuos que son a la vez alumnos y desordenados:

$$A \cap -B$$

Expresando el hecho de que efectivamente hay elementos en esta clase, escribimos:

$\exists!\ A \cap -B$ (juicio particular negativo **o**)

Por último también formulan ustedes, juicios tales como: "Pedro no es buen compañero", "Sócrates es filósofo", etc., en los cuales se refieren a un solo individuo. Se trata en este caso de *juicios singulares*, afirmativos o negativos.

Cuando dicen por ejemplo: "Sócrates es filósofo" es lo mismo que si dijeran: "Sócrates es elemento de la clase de los filósofos". Llamando A a la clase de los filósofos y siendo x, Sócrates en nuestro ejemplo, tenemos:

$x \in A$ (juicio singular afirmativo)

Pero si B es la clase de los pintores, tendríamos:

$$x \in -B$$ (juicio singular negativo)

Es decir: "Sócrates no es pintor" o: "Sócrates es elemento de la clase de los individuos que no son pintores".

Tomemos nuevamente el juicio universal afirmativo: "Todos los hombres son mortales" (A ⊂ B). Podemos negar este juicio y por lo tanto decir: "Es falso que todos los hombres son mortales". Se puede demostrar que esto equivale a decir: "Algunos hombres no son mortales" (juicio **o**). Expresando esto por medio de clases tendríamos:

$$\exists!\ A \cap -B$$

Es decir, la clase de los individuos que son hombres y no mortales no es vacía. De donde negando un juicio **a** llegamos al juicio **o**:

$$-a = o$$

Tomemos nuevamente nuestro juicio "Algunos alumnos son ordenados", es decir, "Hay individuos que son a la vez alumnos y ordenados". Esto equivale según hemos visto, a decir: "Algunos ordenados son alumnos", es decir, "Hay individuos que son a la vez ordenados y alumnos". Podríamos proceder de la misma manera con el juicio particular negativo. "Algunos alumnos no son ordenados", el que por lo tanto tendría el mismo significado que el juicio: "Algunos individuos no ordenados son alumnos". Este procedimiento recibe en el primer caso el nombre de *conversión*, y en el segundo caso el de *contraposición* parcial.

Simbolizando:

$$\exists!\ A \cap B$$

es lo mismo que

$$\exists!\ B \cap A$$

y

$$\exists!\ A \cap -B$$

es lo mismo que

$$\exists!\ -B \cap A$$

El Silogismo Bárbara.—En página 102 hemos dado un ejemplo de raciocinio:

Todos los chilenos son americanos
Todos los santiaguinos son chilenos
Todos los santiaguinos son americanos

Hemos dicho, además, que los juicios que están sobre la raya horizontal se llaman premisas y el que está bajo, conclusión.

Ahora bien, aplicando lo que hemos ya mostrado en el Cálculo de Clases, podemos escribir las premisas y la conclusión de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} A \subset B & \text{(juicio } \mathbf{a}) \\ C \subset A & \text{(juicio } \mathbf{a}) \\ \hline C \subset B & \text{(juicio } \mathbf{a}) \end{array}$$

A este raciocinio se le ha llamado desde antiguo "silogismo Bárbara", teniendo en cuenta que la palabra "Bárbara" tiene tres letras "a". Por convención, entonces, cuando un raciocinio tiene sus dos premisas y su conclusión universales afirmativas (**a**) se le denomina "Bárbara".

Estos raciocinios y otros que aquí no presentaremos fueron tratados por Aristóteles (Primeros Analíticos). Los Lógicos modernos han logrado una mayor perfección y rigor en su formulación, al mismo tiempo que determinado su número axiomáticamente.

4.° *Significados del verbo "Ser"*

En el lenguaje diario empleamos a cada instante el verbo ser. Sea que digamos: "Juan es un buen compañero". "Los perros son mamíferos..." y así sucesivamente. No se hace ninguna diferencia en cuanto al significado del verbo en cada caso a pesar de que por lo menos un matiz diferencial es evidente de un juicio a otro. Veamos ahora, utilizando nuestros conocimientos sobre los juicios, los cuatro significados principales que es posible distinguir en el verbo que tratamos.

1) Cuando se dice por ejemplo: "Beethoven es el sordo de Bonn" se está empleando el verbo en el sentido de "ser idéntico a". Así, decir "Beethoven" es lo mismo que decir " el sordo de Bonn". Tomando otro ejemplo: "Santiago es la capital de Chile": "Santiago es idéntico a la capital de Chile". En este caso el verbo ser se simboliza por el signo "=", por ejemplo: "Santiago = capital de Chile".

2) Cuando se dice por ejemplo: "Juan es profesor", o "Platón es filósofo" se está empleando el verbo ser en el sentido de "ser elemento de". Así, Platón es elemento de la clase de filósofos, Juan es el elemento de la clase de los profesores. En este caso el verbo se simboliza por: ε: y es como hemos representado los juicios singulares: Platón (a); clase de los filósofos (F).

3) Cuando decimos por ejemplo: "Todos los hombres son mortales" o "Todos los árboles son plantas" se está empleando el verbo con el sentido de "subclase de". Así la clase de los árboles es una subclase de la clase de las plantas. La clase de los hombres es una subclase de la clase de los mortales. En este caso el verbo ser se simboliza por $\subset$.

4) Cuando decimos, por ejemplo: 'Algunos alumnos son ordenados" estamos empleando el verbo ser en el sentido de "ser la intersección no vacía de". Así: "Algunos alumnos son ordenados" es la intersección no vacía de la clase de los alumnos y la clase de los individuos ordenados. Se simboliza por $\exists!$; y es como hemos representado los juicios particulares.

Ejercicios

1.—Si A representa la clase de todos los peces y B la clase de los peces de río, ¿qué podrían ustedes decir en la relación de A y B, por qué?

2.—¿Cuál es la intersección entre escritores y personas de nacionalidad chilena?

3.—Si A es la clase de todos los cuadrados y B la clase de todos los rectángulos, ¿cuál sería la unión de A y B?

4.—Si B representa la clase de los jugadores de fútbol, ¿cuál sería la negación de B? Nombre usted algunos elementos que pertenecen a esta clase.

5.—Si A es la clase de las figuras de tres lados y tenemos que A = B, ¿qué clase representa B?

6.—Representar geométricamente:
   a) "y" es elemento de B,
   b) el Liceo N.° 3 es uno de los liceos de Santiago.
   c) la cala no es una flor roja.
   d) Johnson es un profesor extranjero.
   e) la totalidad de los seres mitológicos.
   f) las vacas son una subclase de los mamíferos.

EL CALCULO DE RELACIONES

1.° *Ejemplos y definiciones*

Consideremos, ahora, las siguientes proposiciones:

Carlos *es hermano de* Juan
Chile *es menor que* Argentina
El castellano *es parecido al* portugués.

El carácter distintivo de éstas y otras frases similares, consiste en que todas ellas establecen una conexión entre un par de elementos, que en el caso de nuestro ejemplo, son: Carlos-Juan, Chile-Argentina, castellano-portugués. La conexión respectiva es llamada *relación*, y está dada por la expresión escrita con letras mayúsculas.

Los pares de elementos indicados admiten, desde luego, también otras relaciones. Así, el par Carlos-Juan, podría satisfacer las otras dos relaciones indicadas:

Carlos *es menor que* Juan
Carlos *es parecido a* Juan

y también otra:

Carlos *es más pesado que* Juan

Además, cada uno de los miembros de un par, puede aparecer bajo la misma, u otra, relación con un miembro distinto. Así,

Juan *es hermano de* Antonio
Carlos *es casado con* Marta

Frases que establecen relaciones son muy frecuentes en el lenguaje científico, especialmente en las matemáticas. Así $(2 + 2) = 4$, indica que $(2 + 2)$ está en la relación de *igualdad* ("es igual a") con 4.

En general, cualquier frase que establece alguna relación, dada por cierta propiedad, entre un par de elementos (cosas, personas, ideas, etc.), puede ser simbolizado en forma muy conveniente por

x R y

que indica que *x está en la relación R con y.*

x, o y considerados individualmente, se llaman *miembros* de la relación R.

El miembro que antecede a "R" (x en nuestro ejemplo) se llama *referente,* y el que sucede a "R" (y) se llama *relato.*

Las letras usadas no son las únicas posibles; así, expresiones como "z P w", o "p T q", simbolizan también relaciones.

2.° *Relación Negada*

Supongamos que Carlos (c) y Juan (j) son hermanos. Si H es la relación *ser hermano de,* tenemos desde luego c H j, y también j H c.

Si ambos *son amigos* (A), podemos escribir asimismo c A j. Pero si P es la relación *ser padre de,* entonces "Carlos *no* está en la relación P con Juan". La expresión entre comillas establece la *relación negada* de P entre c y j. En símbolos se expresa lo anterior: c — P j.

En general, si x está en la relación R con y, pero x *no* está en la relación R con z, entonces escribimos respectivamente: x R y; x — R z.

Como ejemplos de relaciones y sus negadas, tenemos:

R	—R
Mata a	*No matar a*
Dar a	*No dar a*
Más bello que	*No más bello que*

En Lógica basta anteponer la negación *no* a una relación dada para obtener su negada. Sin embargo, el idioma común posee, para la negación de algunas relaciones, expresiones que evitan el uso del no. Así, por ejemplo, la relación *no ser igual a* puede reemplazarse por *ser distinto de,* que expresa lo mismo. Pero esto envuelve sus peligros. Si "R" denota, por ejemplo, *ser más pesado que,* entonces podría pensarse que la relación T: *ser menos pesado que,* es la negada de R. Pero si Raúl (r) *no* es más pesado que Sergio (s), en símbolos r — R s, podría muy bien ser que Raúl y Sergio tuvieran el mismo peso, en cuyo caso r T s sería falso.

3.° *Relación Inversa*

Si bien la relación T del ejemplo anterior no es la relación negada de R, guarda, sin embargo, con R una íntima conexión. En efecto, supongamos que Mario (m) es más pesado que Nano (n); en símbolos: m R n. Entonces tenemos, desde luego, que Nano es menos pesado que Mario, es decir, n T m. Vemos que al pasar de una expresión simbólica a la otra se ha invertido el referente y el relato. Decimos, en este caso, que T es la *relación inversa* de R, o R es la relación inversa de T, y escribimos respectivamente entre $R = \breve{T}$; $T = \breve{R}$ Así, nuestro ejemplo puede escribirse n $\breve{R}$ m.

En general, si todo par de elementos x-y para el cual se tiene x P y, se tiene también y Q x (nótese el orden invertido) entonces Q es la relación *inversa* de P, o P es la relación inversa de Q, y escribimos $P = \breve{Q}$, o $Q = \breve{P}$.

Así, a las relaciones dadas anteriormente corresponde las siguientes relaciones inversas:

R	$\breve{R}$
Matar a	*Ser matado por*
Dar a	*Recibir de*
Más bello que	*Menos bello que*

Dada cierta relación R, no debe confundirse su negada — R con su inversa $\breve{R}$. Así, por ejemplo, si R es la relación matemática "$\gtreqless$" (mayor o igual que), entonces $\breve{R}$ es "<" (menor que), mientras — R es *"no* mayor o igual que" que se acostumbra simbolizar por "$\geqq$". Claro que cualquiera par de elementos que están en la relación $\breve{R}$ (<), también están en la relación — R, pero no recíprocamente. En efecto, $3 < 4$, y $3 \geqq 4$ son ambas válidas.

4.° *Relaciones Reflexivas, Simétricas y Transitivas*

Un grupo muy importante de relaciones son las que verifican algunas de las propiedades que se indican:

R es *reflexiva* si x R x para todo x que es miembro de R.

R es *simétrica* si x R y implica siempre y R x.

R es *transitiva* si x R y y y R z implica siempre x R z.

Así, una relación R es *reflexiva* si cualquier referente de R puede ser relato de sí mismo. La relación "$\geq$" es reflexiva, ya que para cualquier número n se tiene siempre $n \geq n$. Pero ">" no es reflexiva, puesto que $n > n$ es absurdo. Además, de un modo algo artificial podemos afirmar que un individuo se suicida a sí mismo. Entonces *suicidar A* es una relación reflexiva: "Carlos *suicida a* Carlos" (Carlos se suicida).

La relación *ser cónyuge de* es *simétrica,* pues si x *es cónyuge de* y, entonces se tiene también siempre: y *es cónyuge de* x. Pero la relación *ser amigo de,* no es simétrica, ya que si Carlos es amigo de Juan, puede muy bien ser que Juan *no* sea amigo de Carlos.

Como de $a = b$ y $b = c$, podemos concluir que $a = c$, tenemos que "=" es un ejemplo de relación *transitiva.* Del mismo modo, la relación de paralelismo (||) en geometría es también transitiva; en efecto, si $L_1 \parallel L_2$ y $L_2 \parallel L_3$, entonces $L_1 \parallel L_3$. Es decir, "si dos rectas (L_1 y L_3) son paralelas a una tercera, (L_2), entonces son paralelas entre sí".

La relación matemática "=" de igualdad, es al mismo tiempo reflexiva, simétrica y transitiva. En efecto, para todo número a, b y c, se tiene siempre:

reflexiva: $a = a$
simétrica: si $a = b$ entonces $b = a$
transitiva: si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Ejercicios

1) Dé ejemplos de relaciones que se puedan establecer entre:
   a) figuras, geométricas; b) dos clases A y B;
   c) un elemento *a* y la clase *A* de la cual es elemento
   d) dos personas (relación de parentesco); e) objetos de la sala;
   f) dos animales; g) dos plantas; h) dos proposiciones.
2) Forme expresiones con las relaciones del punto **1.**
3) Simbolice adecuadamente las expresiones de (2). Indique el referente, el relato, la relación, los miembros de la relación y el par de elementos de la relación.
4) Indique las relaciones negadas e inversas **de:**

a) *Ser abuela de* (R); b) *recibir de* (S);
c) *Ser divisible por* (T); d) *Ser perpendicular a* (U);
e) *Ser enemigo de* (V).

5) Indique cuáles de las relaciones de (4) son simétricas, reflexivas o transitivas.
6) Dé 5 ejemplos de relaciones simétricas, 5 de reflexiones y 5 de transitivas.

BIBLIOGRAFÍA

Ferrater Mora, J. *Lógica Matemática.* Fondo de Cultura Económica, 1956.

Russell, B. *Introducción a la Filosofía Matemática.* Editorial Losada (Trad.).

Stahl, G. *Introducción a la Lógica Simbólica.* Edic. Universidad de Chile, 1956.

Apuntes del Curso de Lógica General.

Tarski, A. *Introduction to Logic.* Oxford University Press, 1951.