

Período de estructuras de edificios

Sin la cooperación inteligente y entusiasta del Instituto de Estabilidad Experimental de la Universidad de Chile, no habría podido realizar este trabajo. Es una satisfacción para mí darle a conocer con esta publicación mis agradecimientos.

A. C. V.

1. *Introducción.*—La Ordenanza General de Construcciones prohíbe las construcciones, cuyo período propio quede comprendido entre 1 y 2 segundos. Esta disposición fundamentada en el notable procedimiento propuesto por el Ingeniero señor Julio Ibáñez V., para el cálculo de una construcción a la acción de los temblores, tiene por objeto evitar los fenómenos de resonancia que se producirían, si el período propio de vibración de la estructura coincidiera con el período del terremoto.

En los edificios corrientes con muros de albañilería y tabiques, dispuestos tanto longitudinal como transversalmente, el período propio de la construcción queda muy por debajo del valor indicado; pero en estructuras de puentes, estanques elevados y edificios de muchos pisos, constituídas esencialmente por vigas y pilares de hormigón armado, el período puede acercarse al límite prohibido.

En estos casos la aplicación de la disposición de la Ordenanza resulta difícil, por cuanto no se han dado a conocer hasta ahora fórmulas para calcular el período de tales estructuras.

La fórmula que indica la Ordenanza, de aplicación limitada a cierto tipo de edificios, no es práctica, ya que aparece en ella un coeficiente que depende de la rigidez de las distintas partes, coeficiente de difícil determinación.

Aunque el problema en cuestión ha sido resuelto satisfactoriamente por el Instituto de Estabilidad Experimental, midiendo el período buscado, en un modelo de la estructura que debe construir para cada caso especial; creemos de interés dar a conocer un método de cálculo, basado en las deformaciones que sufre una estructura sometida a la acción de fuerzas horizontales y que podríamos llamar «método del desplazamiento de la estructura».

2. Si en la expresión de un período vibratorio

$$1) T = \frac{2 \pi}{\omega} = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{c}}$$

hacemos $m = \frac{P}{g}$ y $\frac{P}{c} = \delta$ obtenemos la relación

$$2) T = 0,2 \sqrt{\delta}$$

ω : frecuencia de las oscilaciones

m : masa oscilante

c : fuerza necesaria para que el recorrido de la masa oscilante sea 1 cm.

g : aceleración de la gravedad = 981 cm/seg/seg.

δ : desplazamiento en cm. debido a la fuerza P .

Esta fórmula es exacta para el caso en que la masa oscilante actúe concentrada en un punto, base para establecer la fórmula 1). Puede, pues ser aplicada para determinar el período de estructuras de puentes y de estanques elevados, en las que toda la masa puede ser considerada actuando a una altura determinada.

Para aplicarla a una estructura de edificios con masas actuando a diversas alturas, al nivel de cada piso, sería necesario demostrar que el período de toda la estructura es función del desplazamiento δ del piso superior. Aunque la demostración matemática no haya sido efectuada, hemos comprobado que la fórmula 2) da resultados que coinciden con las experiencias efectuadas en modelos por el Instituto de Estabilidad Experimental.

En el cuadro A aparecen los resultados comparados para diversas estructuras estudiadas: pórticos simple de 1-2-3-4 pisos y pórtico doble de dos pisos.

Basados en estos resultados, proponemos se aplique la fórmula indicada para determinar el período de las estructuras de edificios hasta de 40 m. de altura, permitidos por la Ordenanza. El problema se reduce a calcular el desplazamiento total de la estructura debido a fuerzas horizontales actuando al nivel de cada piso y de magnitud iguales al peso del piso más el peso de los semi-pilares adyacentes al piso considerado. (*)

3.—PROCEDIMIENTO PARA DETERMINAR EL DESPLAZAMIENTO δ .

a) En el caso de estructuras no muy complicadas la aplicación del método «Slope Deflection» conduce fácilmente al resultado.

El ejemplo 1, muestra en detalle el cálculo para obtener el desplazamiento del pórtico triple de dos pisos de igual altura y con las mismas rigideces de los pilares y de los dinteles en cada piso, en función de la relación rigidez dintel a rigidez pilar.

En el cuadro C, se ha resumido los períodos propios de diversas estructuras deducidos en la forma indicada. Ver también «Período de Estructuras de Puentes» en los «Anales de octubre-noviembre 1943.

b) Para estructuras de muchos pisos, con elevado grado de indeterminación, el método Slope Deflección resulta muy laborioso. En tales casos puede obtenerse el desplazamiento, de los momentos en los extremos de los pilares producidos por

(*) Lo limitado de las experiencias no permite deducir que la fórmula sea de aplicación general, por ejemplo al caso de rascacielos con una relación entre la altura y la base mayor de cinco.

las fuerzas horizontales del cálculo sísmico de la construcción, actuando al nivel de cada piso.

En efecto, podemos observar que el cálculo del desplazamiento de la estructura debido a los pesos P por piso es un problema análogo al cálculo de la sollicitación (determinación de los momentos y esfuerzos de corte) producido por las acciones sísmicas P' proporcionales a los pesos P .

Conocidos pues, los momentos M' debidos a las fuerzas P' sísmicas, se obtendrá los momentos M correspondientes a los pesos P actuando horizontalmente, por una simple proporción.

Entonces el procedimiento Slope Deflection nos permite calcular los desplazamientos Δ por piso, en función de los momentos en los extremos de los pilares, eliminando de las ecuaciones los ángulos θ de giro.

Como todos los pilares de un piso sufren un mismo desplazamiento, bastará efectuar el cálculo, considerando una sola de las columnas, tal como la ABCD (fig. 1).

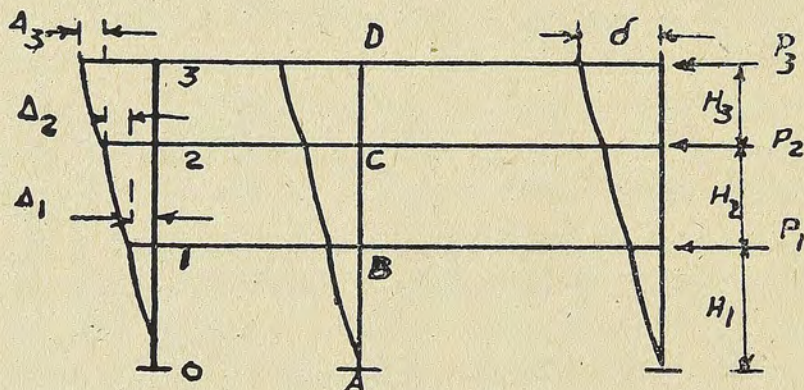


Fig. 1

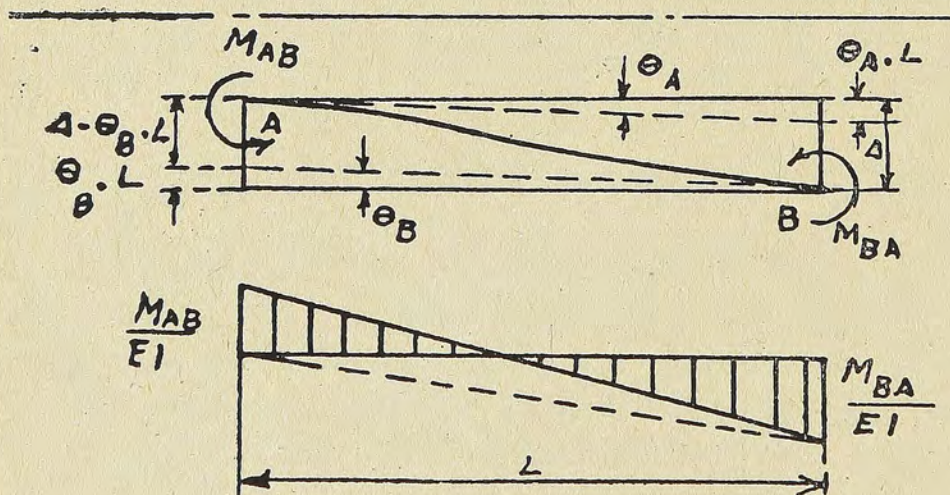


Fig. 2

Como es sabido, las ecuaciones generales del método Slope Deflection aplicadas a una barra de momento de inercia constante, sollicitada por momentos M_{AB} y M_{BA} en sus extremos y sujeta a un desplazamiento Δ (fig. 2) se obtienen de la aplicación de los Teoremas de Mohr:

$$3) \Delta - \theta_A L = \frac{M_{BA} \cdot L^2}{6EI} - \frac{M_{AB} \cdot L^2}{3EI}$$

$$4) \theta_A - \theta_B = \frac{M_{AB} \cdot L}{2EI} - \frac{M_{BA} \cdot L}{2EI}$$

De estas dos ecuaciones, eliminando M_{BA} resulta:

$$5) M_{AB} = 2E \cdot \frac{I}{L} \left(2\theta_A + \theta_B - 3 \frac{\Delta}{L} \right)$$

y haciendo

$$k = \frac{EI}{L} \text{ y } \frac{3\Delta}{L} = R$$

$$6) M_{AB} = 2k(2\theta_A + \theta_B - R)$$

Análogamente:

$$7) M_{BA} = 2k(2\theta_B + \theta_A - R)$$

Aplicando estas relaciones 6) y 7) a la columna ABCD (fig. 1), tendremos:

$$8) M_{AB} = 2k_{AB}(\theta_B - R_1) \text{ con } R_1 = \frac{3\Delta_1}{H_1}$$

$$9) M_{BA} = 2k_{AB}(2\theta_B - R_1)$$

$$10) M_{BC} = 2k_{BC}(2\theta_B + \theta_C - R_2) \text{ con } R_2 = \frac{3\Delta_2}{H_2}$$

$$11) M_{CB} = 2k_{BC}(2\theta_C + \theta_B - R_2)$$

$$12) M_{CD} = 2k_{CD}(2\theta_C + \theta_D - R_3) \text{ con } R_3 = \frac{3\Delta_3}{H_3}$$

$$13) M_{DC} = 2k_{CD}(2\theta_D + \theta_C - R_3)$$

De las ecuaciones 8) y 9) obtenemos:

$$14) R_1 = \frac{M_{BA} - 2M_{AB}}{2k_{AB}}$$

Agregando las ecuaciones 10) y 11) obtenemos:

$$15) R_2 = \frac{M_{CB} - 2M_{BC}}{2k_{BC}} + \frac{3M_{BA} - 3M_{AB}}{2k_{AB}}$$

Con las ecuaciones 12) y 13):

$$16) R_3 = \frac{M_{DC} - 2M_{CD}}{2k_{CD}} + \frac{3M_{CB} - 3M_{BC}}{2k_{BC}} + \frac{3M_{BA} - 3M_{AB}}{2k_{AB}}$$

La expresión de los valores $R_1 - R_2 - R_3$ no varía aunque haya otros pisos más arriba.

El desplazamiento δ será:

$$17) \delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

$$18) \delta = H_1 \frac{M_{BA} - 2M_{AB}}{6k_{AB}} + H_2 \frac{M_{CB} - 2M_{BC}}{6k_{BC}} + H_3 \frac{M_{DC} - 2M_{CD}}{6k_{CD}} \\ + (H_2 + H_3) \frac{M_{BA} - M_{AB}}{2k_{AB}} + H_3 \frac{M_{CB} - M_{BC}}{2k_{BC}}$$

Tratándose de una estructura de n pisos, y designando por M_{01} y M_{10} los momentos en los extremos inferior y superior de un pilar del primer piso, por M_{12} y M_{21} los momentos correspondientes al pilar del segundo piso, etc., podemos colocar inmediatamente el valor de R correspondiente al piso número n .

$$19) R_n = \frac{M_{n(n-1)} - 2M_{(n-1)n}}{2K_{(n-1)n}} + \frac{3M_{(n-1)(n-2)} - 3M_{(n-2)(n-1)}}{2K_{(n-2)(n-1)}} + \dots + \frac{3M_{10} - 3M_{01}}{2K_{01}}$$

y la expresión general del desplazamiento de una estructura de n pisos será:

$$20) \delta = \left(H_1 \cdot \frac{M_{10} - 2M_{01}}{6K_{01}} + H_2 \cdot \frac{M_{21} - 2M_{12}}{6K_{12}} + \dots + H_n \frac{M_{n(n-1)} - 2M_{(n-1)n}}{6K_{(n-1)n}} \right) \\ + (H_2 + H_3 + \dots + H_n) \frac{M_{10} - M_{01}}{2K_{01}} + (H_3 + H_4 + \dots + H_n) \frac{M_{21} - M_{12}}{2K_{12}} + \dots + \\ + H_n \cdot \frac{M_{(n-1)(n-2)} - M_{(n-2)(n-1)}}{2k_{(n-2)(n-1)}}$$

En el caso especial de $H_1 = H_2 = H_n = H$

$$21) \delta = H \left\{ \frac{M_{10}(3n-2) - M_{01}(3n-1)}{6K_{01}} + \frac{M_{21}(3n-5) - M_{12}(3n-4)}{6K_{12}} + \right. \\ \left. \frac{M_{32}(3n-8) - M_{23}(3n-7)}{6K_{23}} + \frac{M_{43}(3n-11) - M_{34}(3n-10)}{6K_{34}} \dots \right\}$$

Para que el procedimiento dé resultados satisfactorios es necesario que los momentos M' hayan sido determinados por un método «exacto», como ser el Slope Deflection, el Método de Distribución de Momentos de Hardy Cross o el Método de Grados de Empotramiento. (El término «exacto» no debe entenderse en el sentido estricto, ya que en estos procedimientos se supone que no varía el largo de los elementos de la estructura. En edificios muy altos la variación del largo de los pilares pasa a tener influencia apreciable).

Los métodos aproximados del Portal y Cantilever no deben emplearse, ya que los desplazamientos que se obtienen aplicando la fórmula 20) a distintas columnas, tendrán que resultar muy distintos a causa de las suposiciones de cálculo de estos métodos.

En el ejemplo 2) pág. 28 se aplica el procedimiento a un pórtico triple de cuatro pisos. Se observa que con los métodos aproximados se obtienen valores del período buscado del orden de 0,5 a 0,7 segundos, según se apliquen las fórmulas a las columnas exteriores o interiores, siendo el verdadero período de la estructura determinado por el procedimiento de Cross-Morris, mayor de un segundo.

C) CASO ESPECIAL CON $\kappa = \infty$

La condición $\kappa = \infty$ equivale a suponer empotramiento perfecto de los pilares en los dinteles.

En tal caso el desplazamiento δ de la estructura se obtendrá sumando los desplazamientos parciales Δ de un piso respecto del vecino, calculados por la relación general:

$$\Delta = F \cdot \frac{H^3}{12 EI}$$

siendo F el esfuerzo de corte a la altura del piso considerado de altura H .

I : la suma de los momentos de inercia de los pilares del piso.

Para la estructura de tres pisos de la figura 1) se tendrá:

$$\Delta_3 = F_3 \cdot \frac{H_3^3}{12 EI_3} = P_3 \cdot \frac{H_3^3}{12 EI_3}$$

$$\Delta_2 = F_2 \cdot \frac{H_2^3}{12 EI_2} = (P_3 + P_2) \frac{H_2^3}{12 EI_2}$$

$$\Delta_1 = F_1 \cdot \frac{H_1^3}{12 EI_1} = (P_3 + P_2 + P_1) \frac{H_1^3}{12 EI_1}$$

El subíndice agregado al valor I indica el piso.

En estas relaciones P_1 — P_2 — P_3 son los pesos de la estructura por piso, supuestos actuando horizontalmente.

El período de la estructura de la figura será:

$$T=0,2 \sqrt{\delta}=0,2 \sqrt{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}$$

La fórmula general para una estructura de n pisos puede escribirse:

$$T=0,2 \sqrt{\sum_1^n \frac{F \cdot H^3}{12 EI}}$$

4). INFLUENCIA DE κ EN EL PERÍODO DE UNA ESTRUCTURA

En el cuadro B. se ha calculado los valores del período de diversas estructuras con pisos de igual altura y de la misma relación κ por piso, para algunos valores de κ y en función de la carga P_0 actuando en cada dintel, supuesta igual por paño y por piso. Se indica también el porcentaje de aumento en el valor del período, respecto al de la estructura con $\kappa = \infty$.

Podemos observar que para las estructuras de torre, ya para los valores de $\kappa=5$ este aumento es sólo de 10% en la torre de dos pisos y menor a 15% en la de 4 pisos.

En los pórticos dobles, para $\kappa=2$ el aumento es de 15% para el pórtico de dos pisos y de 26% para el de tres.

Se deduce que se podrá obtener en algunos casos, un valor aproximado, del período de una estructura complicada, de gran utilidad para el anteproyecto de la obra, calculando el desplazamiento como si κ fuera infinito.

5. CONCLUSIONES.—Del estudio anterior podemos resumir las siguientes conclusiones:

a) El período propio de vibración de una estructura está relacionado con el desplazamiento δ del piso superior que sufre la estructura al estar solicitada por fuerzas horizontales actuando a la altura de los dinteles e iguales en magnitud a todo el peso que actúa en el piso considerado.

b) El período de estructuras de edificios hasta de 40 m. de altura puede obtenerse de la relación

$$T=0,2 \sqrt{\delta}$$

c) Conviene seguir las experiencias en modelos para encontrar qué limitaciones tiene la fórmula anterior. En el supuesto caso de que ella fuera de validez general, el problema de determinar el período de una estructura por el cálculo estaría completamente resuelto.

d) Para el cálculo del desplazamiento en estructuras sencillas se recomienda el método Slope Deflection.

e) Tratándose de estructuras con un grado de indeterminación muy elevado conviene deducir el desplazamiento mediante la fórmula 20.), debiendo haber sido calculados previamente los momentos en los extremos de cada pilar, producidos por los pesos P actuando horizontalmente, por un método exacto.

f) Un valor aproximado del período de estructuras, de relación, rigidez dintel

a rigidez pilar, α mayor que 2, se obtiene evaluando el desplazamiento total correspondiente al caso $\alpha = \infty$.

Ejemplo 1.—Desplazamiento del pórtico triple de dos pisos, sometido a cargas P iguales por piso, actuando horizontalmente. (Fig. 3).

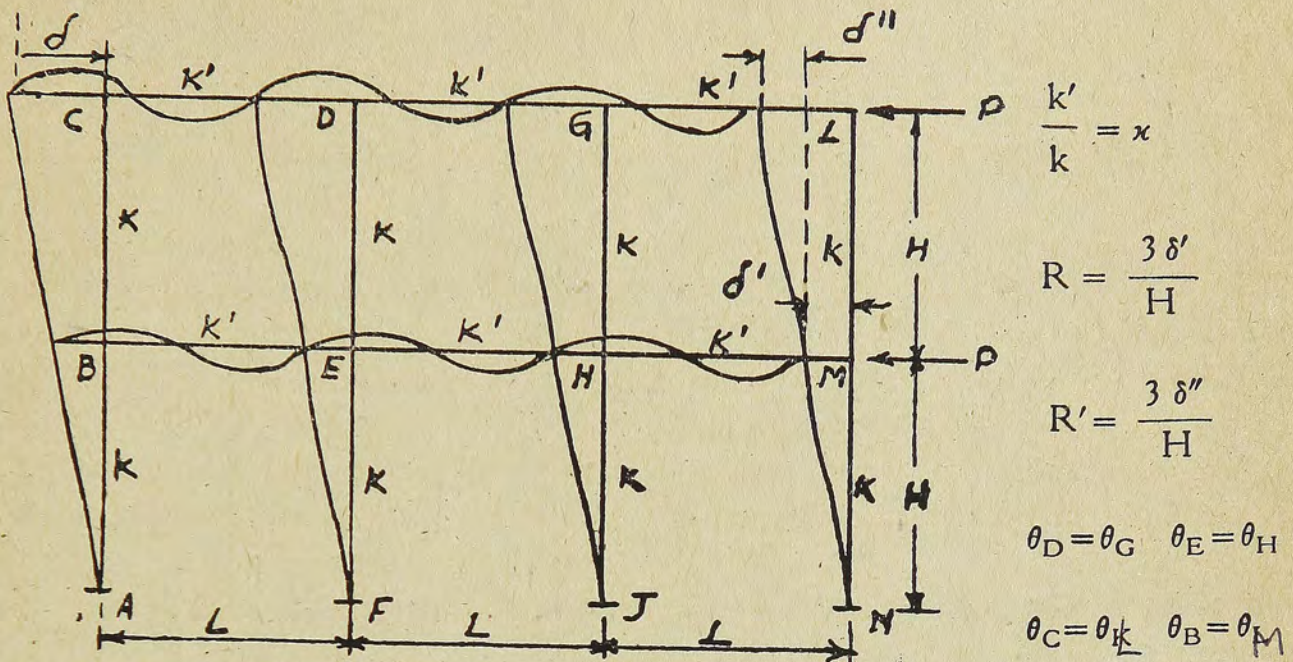


Fig. 3

El método Slope Deflection nos da las siguientes ecuaciones de barras:

$$\begin{aligned}
 M_{AB} &= 2k(\theta_B - R) & M_{BA} &= 2k(2\theta_B - R) \\
 M_{BC} &= 2k(2\theta_B + \theta_C - R') & M_{CB} &= 2k(2\theta_C + \theta_B - R') \\
 M_{FE} &= 2k(\theta_E - R) & M_{EF} &= 2k(2\theta_E - R) \\
 M_{ED} &= 2k(2\theta_E + \theta_D - R') & M_{DE} &= 2k(2\theta_D + \theta_E - R') \\
 M_{BE} &= 2k'(2\theta_B + \theta_E) & M_{EB} &= 2k'(2\theta_E + \theta_B) \\
 M_{CD} &= 2k'(2\theta_C + \theta_D) & M_{DC} &= 2k'(2\theta_D + \theta_C) \\
 M_{DG} &= 2k'(3\theta_D) & M_{EH} &= 2k'(3\theta_E)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de nudos:

$$1) \Sigma M_B = 0 \quad 2) \Sigma M_C = 0 \quad 3) \Sigma M_D = 0 \quad 4) \Sigma M_E = 0$$

dan cuatro ecuaciones entre las incógnitas $\theta_B - \theta_C - \theta_E - \theta_D - \delta' - \delta''$.

Otras dos ecuaciones se obtienen de las relaciones entre los momentos y las fuerzas exteriores.

$$5) \quad M_{CB} + M_{BC} + M_{DE} + M_{ED} = - \frac{PH}{2}$$

$$6) \quad M_{AB} + M_{BA} + M_{FE} + M_{EF} = - \frac{2PH}{2}$$

Introduciendo en las ec. 1) a 6) los valores de los momentos indicados más arriba, se obtiene:

$$1) \quad \theta_B (4 + 2\kappa) + \theta_C + \kappa \theta_E - R - R' = 0$$

$$2) \quad \theta_B + \theta_C (2 + 2\kappa) + \kappa \theta_D - R' = 0$$

$$3) \quad \kappa \theta_C + \theta_D (2 + 5\kappa) + \theta_E - R' = 0$$

$$4) \quad \kappa \theta_B + \theta_D + \theta_E (4 + 5\kappa) - R - R' = 0$$

$$5) \quad \theta_B + \theta_C + \theta_D + \theta_E - \frac{4}{3} R' + \frac{PH}{12k} = 0$$

$$6) \quad \theta_B + \theta_E - \frac{4}{3} R + \frac{PH}{6k} = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones aparece en el cuadro que sigue:

Ec.	θ_B	θ_C	θ_D	θ_E	R	R'	P.H/K
1.	$4+2x$	1	0	x	-1	-1	0
2.	1	$2+2x$	x	0	0	-1	0
3.	0	x	$2+5x$	1	0	-1	0
4.	x	0	1	$4+5x$	-1	-1	0
5.	1	1	1	1	0	$-4/3$	$1/12$
6.	1	0	0	1	$-4/3$	0	$1/6$
7	$4+2x$	0	0	$4+2x$	$-16/3 - 8/3x$	0	$2/3 + 1/3x$
8	x	0	0	x	$-4/3x$	0	$1/6x$
4-7=9'		1	0	$-4-x$	$13/3 + 8/3x$	-1	$-2/3 - 1/3x$
2-6=10.		$2+2x$	x	-1	$4/3$	-1	$-1/6$
3.		x	$2+5x$	1	0	-1	0
4-8=11		0	1	$4+4x$	$-1 + 4/3x$	-1	$-1/6x$
5-6=12		1	1	0	$4/3$	$-4/3$	$-1/12$
12'		$2+2x$	0	$-8-10x-2x^2$	$26/3 + 14x + 14/3x^2$	$-2-2x$	$-4/3 - 2x - 2/3x^2$
13		x	0	$-4x-4x^2$	$x(13/3 + 8/3x^2)$	$-x$	$-2/3x - 1/3x^2$
10-12=14.			x	$7+10x+2x^2$	$-22/3 - 14x - 4/3x^2$	$1+2x$	$7/6 + 2x + 2/3x^2$
3-13=15.			$2+5x$	$1+4x+x^2$	$-13/3x - 8/3x^2$	$-1+x$	$4/3x + 1/3x^2$
11"			1	$4+4x$	$-1 + 4/3x$	-1	$-1/6x$
9-12=16.			-1	$-4-x$	$3 + 8/3x$	$1/3$	$-7/12 - 1/3x$
17			x	$4x+4x^2$	$-x + 4/3x^2$	$-x$	$-1/6x^2$
18			$2+5x$	$8+28x+20x^2$	$-2-7/3x + 20/3x^2$	$-2-5x$	$-1/3x - 5/6x^2$
14-17=19.				$7+6x-2x^2$	$-22/3 - 13x - 10/3x^2$	$1+3x$	$7/6 + 2x + 5/6x^2$
15-18=20.				$-7-24x-19x^2$	$2-2x - 18/3x^2$	$1+6x$	$x + 7/6x^2$
11+16=21.				$3x$	$2+4x$	$-2/3$	$-7/12 - 1/2x$
22.				$9/2x$	$3+6x$	-1	$-7/8 - 3/4x$
23.				$9/2x + 27/2x^2$	$3+18x^2+15x$	$-(1+3x)$	$-7/8 - 9/4x^2 - 27/8x$
24.				$9/2x + 27x^2$	$3+36x^2+24x$	$-(1+6x)$	$-7/8 - 9/2x^2 - 6x$
19+23=25.				$7 + \frac{21}{2}x + \frac{23}{2}x^2$	$-13/3 + 2x + 34/3x^2$	0	$7/24 - 11/8x - 17/12x^2$
20+24=26.				$-7 - \frac{39}{2}x + 8x^2$	$5 + 22x + \frac{80}{3}x^2$	0	$-7/8 - 5x - 10/3x^2$

Haciendo:

$$a = 7 + \frac{21}{2}x + \frac{23}{2}x^2$$

$$b = -\frac{13}{3} + 2x + \frac{34}{3}x^2$$

$$c = -7 - \frac{39}{2}x + 8x^2$$

$$d = 5 + 22x + \frac{80}{3}x^2$$

$$e = \frac{7}{24} - \frac{11}{8}x - \frac{17}{12}x^2$$

$$f = -\frac{7}{8} - 5x - \frac{10}{8}x^2$$

Obtenemos las ecuaciones 25) y 26):

$$25) a \cdot \theta_E + bR + e \cdot \frac{PH}{k} = 0$$

$$26) c \cdot \theta_E + dR + f \cdot \frac{PH}{k} = 0$$

de donde sacamos:

$$27) R = -\frac{PH}{k} \cdot \frac{e \cdot c - a \cdot f}{b \cdot c - a \cdot d}$$

$$28) \theta_E = \frac{PH}{k} \cdot \frac{d \cdot e - b \cdot f}{b \cdot c - a \cdot d}$$

De la e.c. 22):

$$R' = \frac{9}{2}x\theta_E + (3 + 6x)R - \frac{PH}{k}(7/8 + 3/4x)$$

obtenemos:

$$29) R + R' = 9/2x\theta_E + R(4 + 6x) - \frac{PH}{k}(7/8 + 3/4x)$$

ahora: $e \cdot c = \left(\frac{7}{24} - \frac{11}{8}x - \frac{17}{12}x^2\right) \left(-7 - \frac{39}{2}x + 8x^2\right)$

$$= -\frac{49}{24} + \frac{63}{16}x + \frac{625}{16}x^2 + \frac{133}{8}x^2 - \frac{34}{3}x^4$$

$$a \cdot f = \left(7 + \frac{21}{2}x + \frac{23}{2}x^2\right) \left(-\frac{7}{8} - 5x + \frac{10}{3}x^2\right)$$

$$= -\frac{49}{8} - \frac{707}{16}x - \frac{4123}{48}x^2 - \frac{185}{2}x^3 - \frac{115}{3}x^4$$

$$30) e \cdot c - a \cdot f = \frac{49}{12} + \frac{1155}{24}x + \frac{2999}{24}x^2 + \frac{2619}{24}x^3 + 27x^4$$

$$d \cdot e = \left(5 + 22x + \frac{80}{3}x^2\right) \left(\frac{7}{24} - \frac{11}{8}x - \frac{17}{12}x^2\right)$$

$$= \frac{35}{4} + \frac{11}{24}x - \frac{1064}{36}x^2 - \frac{814}{12}x^3 - \frac{340}{9}x^4$$

$$b \cdot f = \left(-\frac{13}{3} + 2x + \frac{34}{3}x^2\right) \left(-\frac{7}{8} - 5x - \frac{10}{3}x^2\right)$$

$$= \frac{91}{24} + \frac{478}{24}x - \frac{197}{36}x^2 - \frac{190}{3}x^3 - \frac{340}{9}x^4$$

$$31) d \cdot e - b \cdot f = \frac{119}{24} - \frac{467}{24}x - \frac{289}{12}x^2 - \frac{9}{2}x^3$$

$$32) \frac{9}{2}x\theta_E = \frac{9}{2}x \cdot \frac{PH}{k} \cdot \frac{de - bf}{bc - ad}$$

$$= \frac{PH}{k(bc - ad)} \left(\frac{357}{16}x - \frac{1401}{16}x^2 - \frac{867}{8}x^3 - \frac{81}{4}x^4\right)$$

$$33) R(4 + 6x) = -\frac{PH}{k} \times (4 + 6x) \frac{e \cdot c - a \cdot f}{bc - ad}$$

$$= -\frac{PH}{k(bc - ad)} \left(\frac{98}{6} + \frac{1302}{6}x + \frac{9463}{12}x^2 + \frac{14235}{12}x^3 + \frac{3051}{4}x^4 + 162x^5\right)$$

$$b \cdot c = \left(-\frac{13}{3} + 2x + \frac{34}{3}x^2\right) \left(-7 - \frac{39}{2}x + 8x^2\right)$$

$$= \frac{91}{3} + \frac{423}{6}x - \frac{918}{6}x^2 - \frac{1230}{6}x^3 + \frac{272}{3}x^4$$

$$\begin{aligned}
 a \cdot d &= \left(7 + \frac{21}{2} x + \frac{23}{2} x^2 \right) \left(5 + 22x + \frac{80}{3} x^2 \right) \\
 &= 35 + \frac{413}{2} x + \frac{2851}{6} x^2 + \frac{3198}{6} x^3 + \frac{920}{3} x^4
 \end{aligned}$$

$$34) bc - ad = -\frac{14}{3} - 136x - \frac{3769}{6} x^2 - 738x^3 - 216x^4$$

$$\begin{aligned}
 35) -\frac{PH}{k} (7/8 + 3/4 x) &= -\frac{PH}{k} (7/8 + 3/4 x) \times \frac{bc - ad}{bc - ad} \\
 &= \frac{49}{12} + \frac{2940}{24} x + \frac{31279}{48} x^2 + \frac{26805}{24} x^3 + \frac{2970}{4} x^4 + 162x^5
 \end{aligned}$$

Introduciendo los valores 32), 33), 34) y 35) en la e.c. 29) obtenemos:

$$36) R + R' = \frac{PH}{k} \times \frac{-49/4 - \frac{1155}{16} x - \frac{898}{4} x^2 - \frac{711}{4} x^3 - \frac{81}{2} x^4}{-14/3 - 136x - \frac{3769}{6} x^2 - 738x^3 - 216x^4}$$

Finalmente:

$$\delta = \frac{PH^3}{8EI_1} \times \frac{49 + 288,8x + 898x^2 + 711x^3 + 162x^4}{7 + 204x + 942,3x^2 + 1107x^3 + 324x^4}$$

Ejemplo 2.—Desplazamiento del pórtico triple de 4 pisos (fig. 4) sometido a fuerzas sísmicas horizontales P' de 10 tons. actuando al nivel de cada piso.

En la misma figura están indicados los valores de los momentos M' en tm. en los extremos de cada pilar, calculados por los métodos del Portal (P), Cantilever (c) y Distribución de Momentos (DM).

Si suponemos que las fuerzas sísmicas P' corresponden a pesos P de la estructura diez veces mayores (coeficiente sísmico 0,1) los momentos M que interesan para el cálculo del desplazamiento son también diez veces mayores.

La fórmula 21) pág. 20 que da el desplazamiento se transforma en este caso, con $n = 4$ y $k = \frac{EI}{L}$ en:

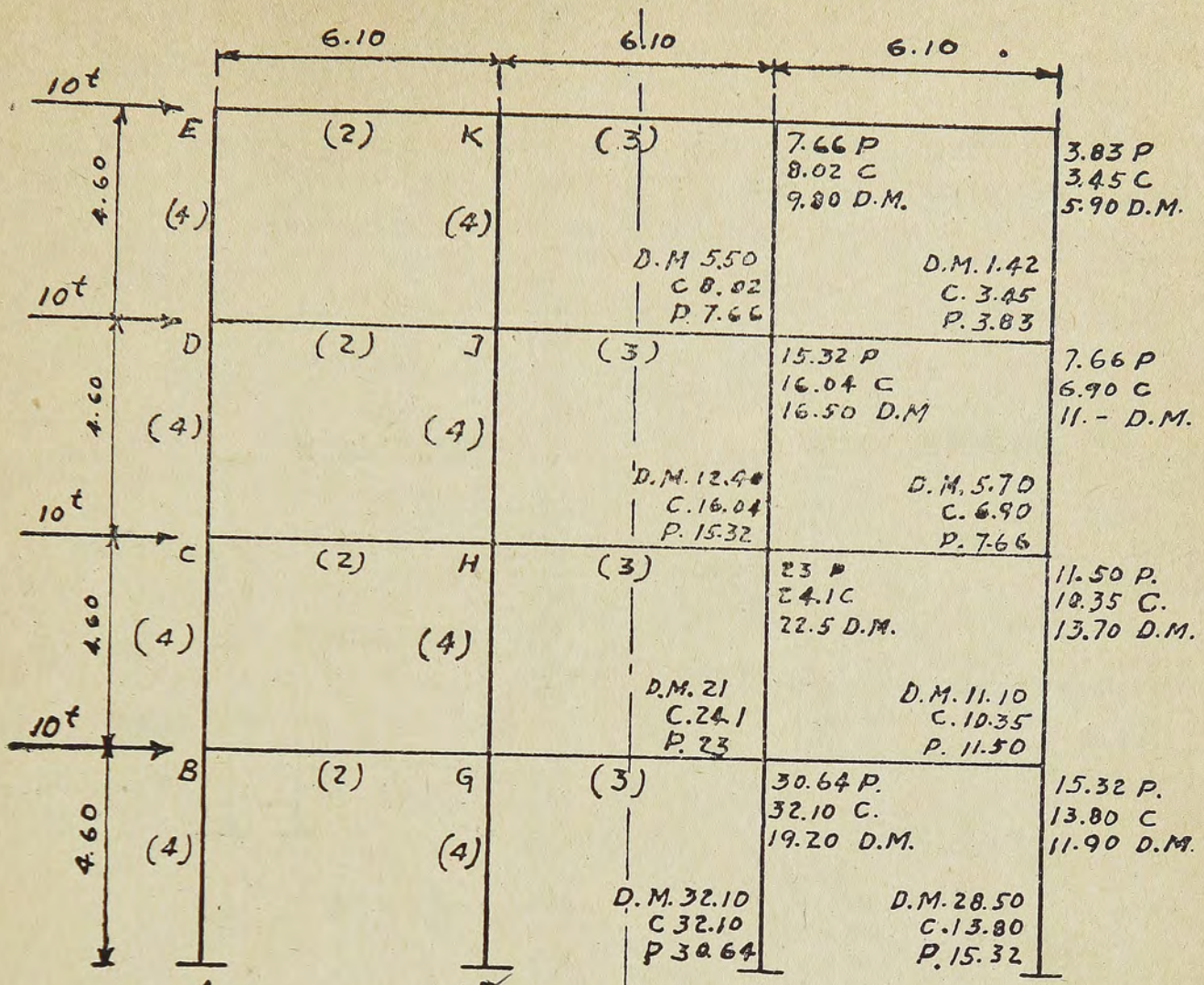


Fig. 4

en () rigideces $\frac{I}{L}$

$$\delta = \frac{H^2}{6EI} (10M_{10} - 11M_{10} + 7M_{21} - 8M_{12} + 4M_{32} - 5M_{23} + M_{43} - 2M_{34})$$

y para $M_{10} = M_{011}$, $M_{21} = M_{12}$, etc, en los métodos aproximados:

$$\delta = - \frac{H^2}{6EI} (M_{01} + M_{12} + M_{23} + M_{34})$$

Los valores que se obtienen para δ y el período T de la estructura, con un valor $I = 10 \times 10^5 \text{ cm}^4$ aplicando estas fórmulas a las columnas ABCDE y FGHIJK son:

Método del Portal $\delta_A = 6.43 \text{ cms.}$ $T_A = 0.51 \text{ seg.}$ $\delta_F = 12.90$ $T_F = 0,72 \text{ seg.}$

Método Cantilever 5.80 0.48 seg. 13.40 0.73 seg.

Método Distribución

de Momentos

28.—

1.06 seg.

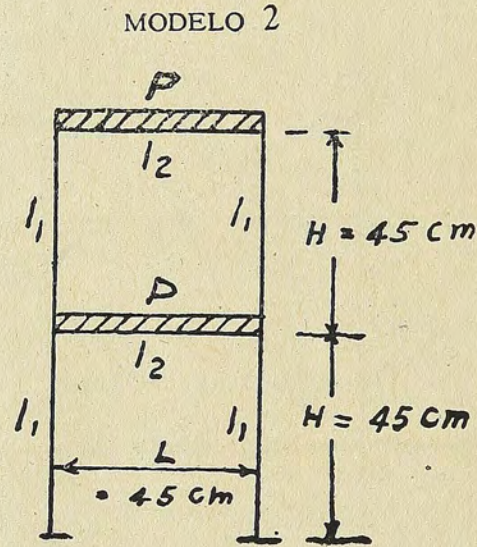
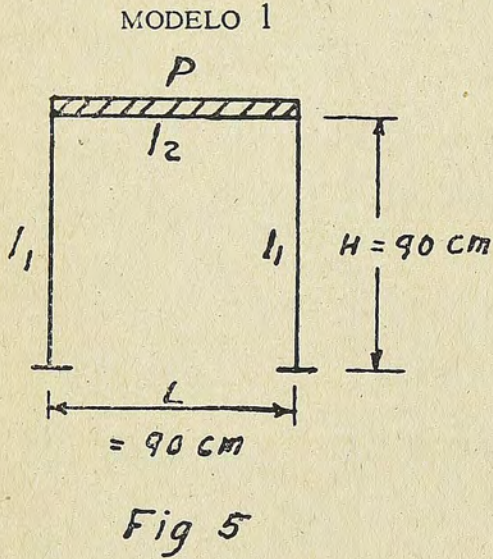
27.—

1.04 seg.

Debe obtenerse el mismo valor, considerando cualquiera columna, como resulta con el método de Distribución de Momentos.

Los métodos Cantilever y del Portal no sirven en el caso estudiado.

CUADRO A-1



$$x = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{H}{L}$$

P : Carga en dintel en kgs.

T¹ : período medido experimentalmente en seg.

T : período calculado por la fórmula en seg.

E : 2100000 k/cm² (acero).

MODELO 1

$$T = 0,2 \sqrt{\frac{PH^3}{12EI_1} \cdot \frac{2+3x'}{1+6x}}$$

Caso	x	I ₁ (cm ⁴)	I ₂ (cm ⁴)	P	T ¹	T	$\frac{T - T^1}{T}$
1	0.2295	2 × 0.008762	2 × 0.00201	3.77	0.55	0.531	-3.58%
2	0.459	»	2 × 0.004036	4.02	0.504	0.489	-3 %
3	0.73	»	2 × 0.006394	4.03	0.465	0.455	-2.2%
4	1	»	2 × 0.008762	4.04	0.444	0.437	-1.6%
5	1.23	»	2 × 0.01077	4.29	0.447	0.438	- 2%
6	1.728	»	2 × 0.01512	4.48	0.441	0.433	-1.9%
7	2.5	»	2 × 0.02189	4.65	0.435	0.427	-1.9%
8	3.92	»	2 × 0.03438	4.93	0.435	0.427	-1.9%
9	7.49	»	2 × 0.06502	5.52	0.452	0.441	-2.7%

MODELO 2

$T = 0,2$

$$\sqrt{\frac{PH^3}{4E I_1} \frac{7 + 30x + 18x^2}{1 + 18x + 36x^2}}$$

Caso	x	I_1 (cm ⁴)	I_2 (cm ⁴)	P	T^1	T	$\frac{T - T^1}{T}$
1	0.1435	2×0.00876	2×0.001257	9.62	0.806	0.803	-0.4%
2	0.2295	›	2×0.00201	11.64	0.786	0.78	-0.8%
3	0.258	›	2×0.002263	9.68	0.674	0.69	+2.3%
4	0.40	›	2×0.003503	9.70	0.594	0.612	+2.94%
5	0.592	›	2×0.00519	11.75	0.616	0.61	-1%
6	1.00	›	2×0.00876	11.78	0.532	0.54	+1.5%
7	1.23	›	2×0.010775	11.906	0.513	0.52	+1.35%
8	1.728	›	2×0.01512	12.—	0.4835	0.49	+1.3%
9	2.50	›	2×0.02189	14.086	0.502	0.50	-0.4%
10	2.93	›	2×0.02562	13.96	0.492	0.488	-0.8%
11	4.69	›	2×0.04115	14.30	0.472	0.471	-0.2%
12	7.49	›	2×0.065602	16.515	0.495	0.486	-1.9%

CUADRO A-2

MODELO 3

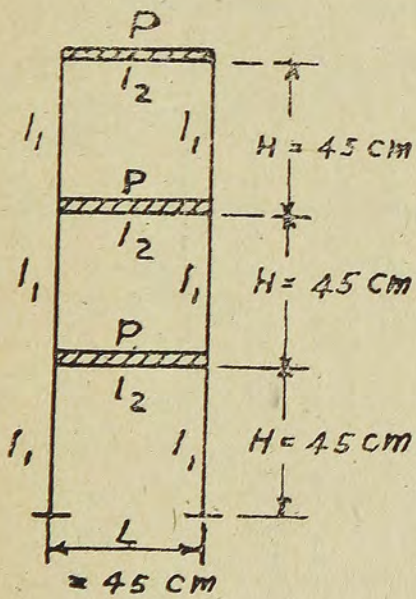


Fig. 7

MODELO 4

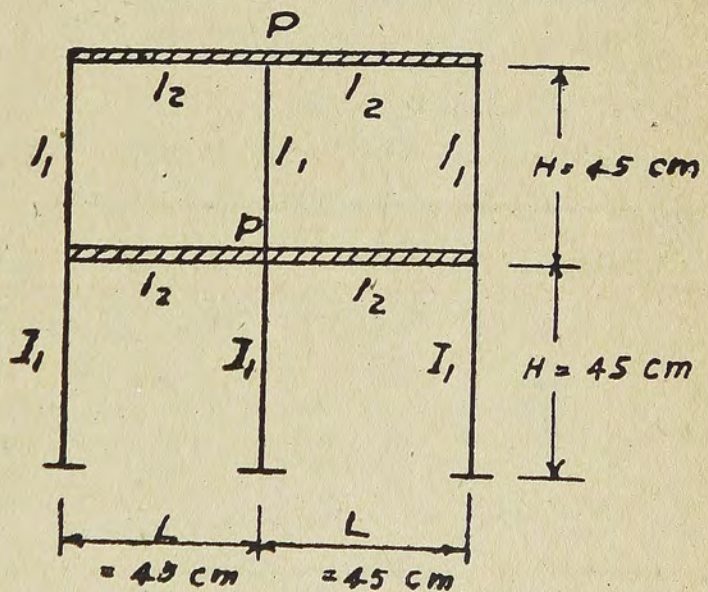


Fig. 8

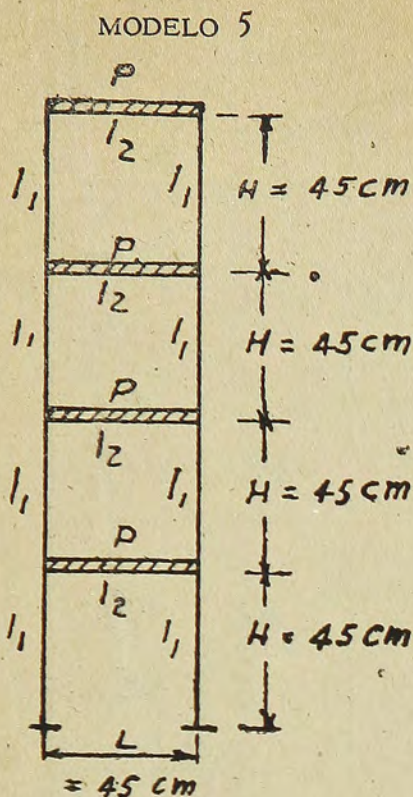
CUADRO A-2

MODELO 3 $T = 0,2 \sqrt{\frac{PH^3}{8EI_1} \cdot \frac{10 + 85x + 162x^2 + 72x^3}{46 + 6x + 30x^2 + 36x^3}}$

Caso	x	I ₁ (cm ⁴)	I ₂ (cm ⁴)	P	T ¹	T	(T - T ¹)/T
1	0.1435	2×0.00876	2×0.001257	6.62	1.11	1.094	-1.5%
2	0.2295	»	2×0.00201	6.64	0.9375	0.945	+0.8%
3	0.258	»	2×0.002263	6.68	0.896	0.915	+2.1%
4	0.40	»	2×0.003503	6.70	0.778	0.799	+2.6%
5	0.592	»	2×0.00519	6.75	0.6875	0.7135	+3.6%
6	0.849	»	2×0.007443	6.84	0.6275	0.648	+3.2%
7	1.00	»	2×0.00876	6.78	0.588	0.62	+5.1%
8	1.23	»	2×0.010775	6.906	0.561	0.593	+5.4%
9	1.728	»	2×0.01512	7.00	0.527	0.554	+4.9%
10	2.50	»	2×0.02189	7.086	0.50	0.514	+2.7%
11	2.93	»	2×0.02562	6.96	0.482	0.502	+4%
12	3.44	»	2×0.03011	7.11	0.476	0.496	+4%
13	4.69	»	2×0.04115	7.31	0.468	0.4845	+3.4%
14	7.49	»	2×0.065602	7.515	0.4465	0.469	+4.8%

MODELO 4 $T = 0,2 \sqrt{\frac{PH^3}{3EI_1} \cdot \frac{0.68 + 5.05x + 9.09x^2 + 5.67x^3 + x^4}{0.195 + 5x + 19.7x^2 + 18x^3 + 4x^4}}$

Caso	x	I ₁ (cm ⁴)	I ₂ (cm ⁴)	P	T ¹	T	(T - T ¹)/T
1	0.2295	2×0.00876	2×0.00201	15.43	0.685	0.684
2	0.593	»	2×0.00519	15.65	0.526	0.542	+3%
3	0.726	»	2×0.00636	15.62	0.504	0.52	+3%
4	0.955	»	2×0.008375	15.87	0.48	0.495	+3%
5	1	»	2×0.00876	18.70	0.515	0.532	+3.2%
6	1.23	»	2×0.01077	15.95	0.455	0.473	+3.8%
7	1.728	»	2×0.01512	19.14	0.478	0.49	+2.5%
8	2.50	»	2×0.02169	16.32	0.422	0.432	+2.3%
9	3.92	»	2×0.03438	16.59	0.403	0.398	+1.2%
10	4.56	»	2×0.039982	16.29	0.40	0.406	+1.5%
11	4.69	»	2×0.04115	16.77	0.3975	0.41	+3%
12	7.49	»	—	17.18	0.392	0.404	+3%



$$\kappa = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{H}{L}$$

$$T = 0,2 \sqrt{\frac{PH^3}{6EI_1} \cdot \frac{65/3 + 304,75\kappa + 1129,5\kappa^2}{1/6 + 10\kappa + 90\kappa^2 + 252\kappa^3} + \frac{1467\kappa^3 + 540\kappa^4}{+ 216\kappa^4}}$$

T' : valor medido experimentalmente

E : 2100000 k/cm² (acero)

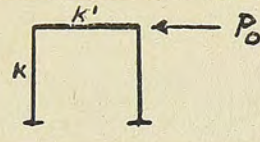
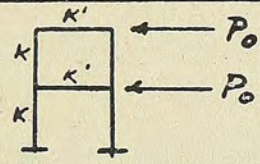
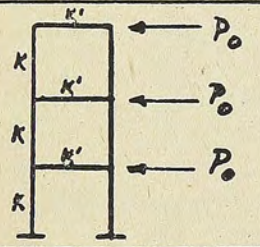
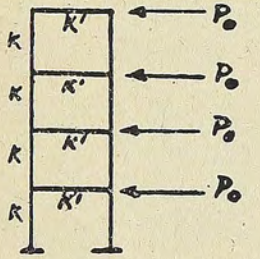
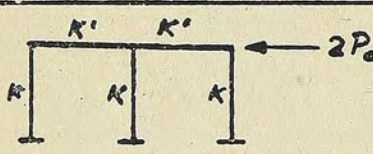
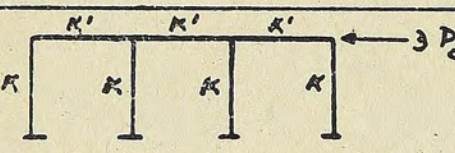
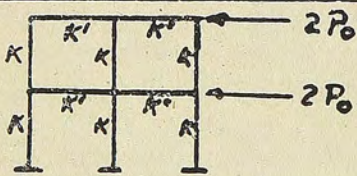
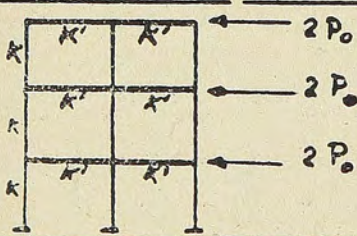
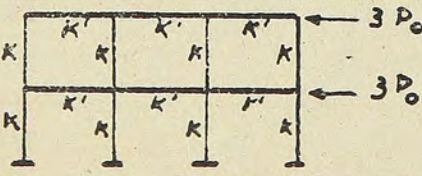
Fig. 9

CUADRO A-3

Caso	κ	I_1 (cm ⁴)	I_2 (cm ⁴)	P	T'	T	(T - T')/T
1	0.1435	2×0.00876	2×0.001259	6.62	1.69	1.54	-9.7%
2	2.2295	»	2×0.00201	6.64	1.364	1.31	-4.1%
3	0.258	»	2×0.002263	6.68	1.305	1.26	-3.6%
4	0.40	»	2×0.003503	6.70	1.095	1.09	-0.5%
5	0.489	»	2×0.00426	6.73	1.—	1.02	+ 2%
6	0.593	»	2×0.00519	6.75	0.968	0.961	-0.7%
7	0.726	»	2×0.00636	6.76	0.885	0.902	+1.9%
8	0.849	»	2×0.07443	6.84	0.846	0.867	+2.4%
9	1.00	»	2×0.00876	6.78	0.79	0.826	+4.3%
10	1.23	»	2×0.01077	6.906	0.76	0.777	+2.2%
11	1.728	»	2×0.01512	7.00	0.706	0.73	+3.3%
12	1.775	»	2×0.01553	6.86	0.6975	0.72	+3.1%
13	2.50	»	2×0.02189	7.086	0.658	0.684	+3.8%
14	2.93	»	2×0.02562	6.96	0.638	0.641	+0.5%
15	4.56	»	2×0.039982	7.07	0.60	0.623	+3.7%
16	4.69	»	2×0.04115	7.31	0.607	0.632	+ 4%
17	7.49	»	2×0.065602	7.515	0.577	0.611	+5.5%

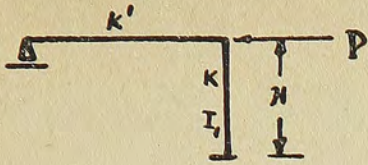
Obs. Los cálculos han sido efectuados a regla de cálculo.

Cuadro B.

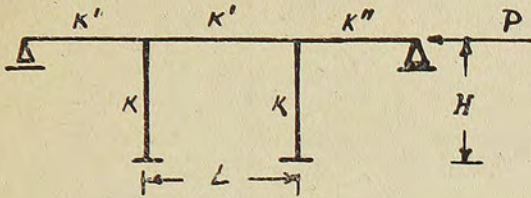
#	$\delta = \frac{P_0 \cdot H^3}{\alpha EI}$	α	α			
			∞	5	2	1
1	 $\alpha = \frac{K'}{K}$	24	21.90 4.5%	19.70 10%	16.80 20%	
2		8	6.55 10%	5.2 24%	4 41%	
3		4	3.14 13%	2.40 29%	1.75 50%	
4		2.4	1.835 14%	1.34 34%	0.90 63%	
5		18	16.50 4.3%	14.90 10%	13.10 17%	
6		16	14.84 4%	13.52 9%	12 15%	
7		6	4.98 10%	4.52 15%	3.27 35%	
8		3	2.42 11%	1.88 26%	1.36 48%	
9		5.33	4.55 8%	3.88 17%	3.29 27%	

Obs. Ver pag 22 N° 4.

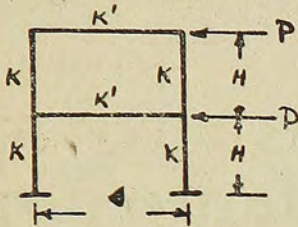
Cuadro C. Periodo de Estructuras.



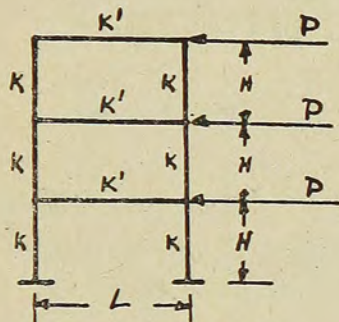
$$T = 0.2 \sqrt{\frac{P \cdot H^3}{12EI} \cdot \frac{4 + 3\alpha}{1 + 3\alpha}}$$



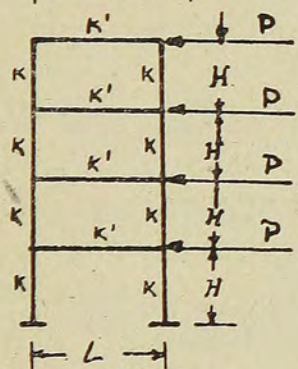
$$T = 0.2 \sqrt{\frac{P \cdot H^3}{24EI} \cdot \frac{4 + 3\alpha' + 6\alpha}{1 + 3\alpha' + 6\alpha}}$$



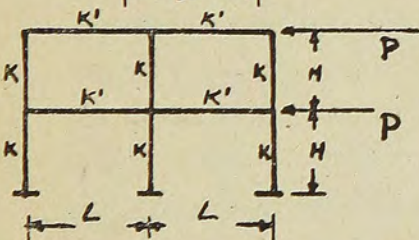
$$T = 0.2 \sqrt{\frac{P \cdot H^3}{12EI} \cdot \frac{3.5 + 15\alpha + 9\alpha^2}{\frac{1}{6} + 3\alpha + 6\alpha^2}}$$



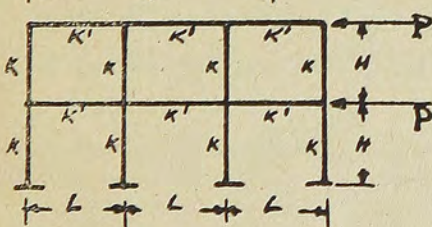
$$T = 0.2 \sqrt{\frac{P \cdot H^3}{12EI} \cdot \frac{10 + 85\alpha + 162\alpha^2 + 72\alpha^3}{\frac{1}{9} + 4\alpha + 20\alpha^2 + 24\alpha^3}}$$



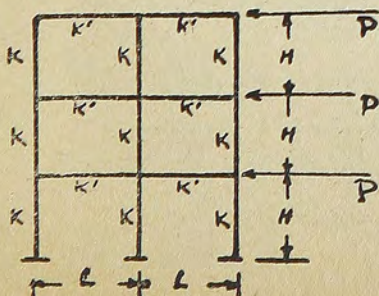
$$T = 0.2 \sqrt{\frac{P \cdot H^3}{6EI} \cdot \frac{21.7 + 647\alpha + 1130\alpha^2 + 1467\alpha^3 + 540\alpha^4}{\frac{1}{6} + 10\alpha + 90\alpha^2 + 252\alpha^3 + 216\alpha^4}}$$



$$T = 0.2 \sqrt{\frac{P \cdot H^3}{3EI} \cdot \frac{0.68 + 5.05\alpha + 9.09\alpha^2 + 5.67\alpha^3 + \alpha^4}{0.195 + 5\alpha + 19.7\alpha^2 + 18\alpha^3 + 4\alpha^4}}$$



$$T = 0.2 \sqrt{\frac{P \cdot H^3}{8EI} \cdot \frac{49 + 288.8\alpha + 898\alpha^2 + 711\alpha^3 + 162\alpha^4}{7 + 204\alpha + 942.3\alpha^2 + 1107\alpha^3 + 324\alpha^4}}$$



$$T = 0.2 \sqrt{\frac{P \cdot H^3}{6EI} \cdot \frac{0.45 + 0.97\alpha + 7.81\alpha^2 + 28.23\alpha^3 + 4.3\alpha^4 + 28.28\alpha^5 + 8.66\alpha^6 + \alpha^7}{0.02\alpha + 0.52\alpha^2 + 6.25\alpha^3 + 18.7\alpha^4 + 18.95\alpha^5 + 7.5\alpha^6 + \alpha^7}}$$