

ANALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

SAN MARTIN 352

—

CASILLA 487

—

SANTIAGO

S u c e s o r

D e l a :

Y d e l :

«SOCIEDAD DE INGENIERIA» «INSTITUTO DE INGENIEROS»
Fundada el 31 de Mayo de 1888 Fundada el 28 de Octubre de 1888

Con Personalidad Jurídica desde el 28 de diciembre de 1900

Adherido a la USAI y a la CONFERENCIA MUNDIAL DE LA ENERGIA

AÑO LXVII ● ENERO - FEBRERO DE 1954 ● N.ºs 1 - 2

Comisión Editora: Raúl Sáez S. (Pdt.). Sergio Silva, Alberto Covarrubias, Rodrigo Flores y Marcelo Honorat

Dinámica de las acciones sísmicas sobre estructuras elásticas

TRABAJO PRESENTADO A LAS CUARTAS JORNADAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL

Por don DARIO SANCHEZ VICKERS, Ingeniero Consultor.

Copyright 1954. U. S. A., Registrado, Chile

Esta publicación se ha inspirado en los trabajos de Culmann-Ritter sobre el cálculo de estructuras planas mediante el empleo de la Elipse de Elasticidad, generalizándolo a los conjuntos de muros y pórticos distribuidos espacialmente que forman el esqueleto resistente de los edificios.

Para el cálculo antisísmico no es aplicable directamente el sistema de Culmann-Ritter porque, además de tratarse de un problema de tres dimensiones, las características elásticas de las estructuras cambian con la dirección del temblor. Para vencer estas otras dificultades se ha estudiado, en toda su generalidad, la inter-relación de los movimientos reales de los elementos soportantes con las fuerzas de inercia.

Cumplo con manifestar mis agradecimientos a la «Fundación Pedro Aguirre Cerda» de la Corporación de Fomento de la Producción por su generosa ayuda para publicar este trabajo en combinación con los Anales del Instituto de Ingenieros de Chile.

* * *

1. La distribución de las fuerzas que produce el viento o el temblor sobre las columnas y muros de un edificio, presenta características especiales cuando el centro de las fuerzas de inercia o de la presión del viento y su resultante no coinciden con los centros de rigideces y los ejes de figura del conjunto de muros y columnas.



2. En los edificios modernos se presentan tres partes elásticamente muy diversas. La superior, formada por cuerpos muy regulares y muy rígidos por sus fachadas y muros más o menos regularmente espaciados; la intermedia, que corresponde al primer piso, formada principalmente por columnas esbeltas y trozos de muros muy abiertos que son mucho más elásticos que las fachadas y muros de la zona superior; y los subterráneos, con muros muy fuertes y sin aberturas que proporcionan gran rigidez a esa zona.

3. Es indudable que calcular las fuerzas individuales que las acciones horizontales del temblor provocan en los trozos de muros y en las columnas de la zona intermedia, es el problema capital del cálculo antisísmico.

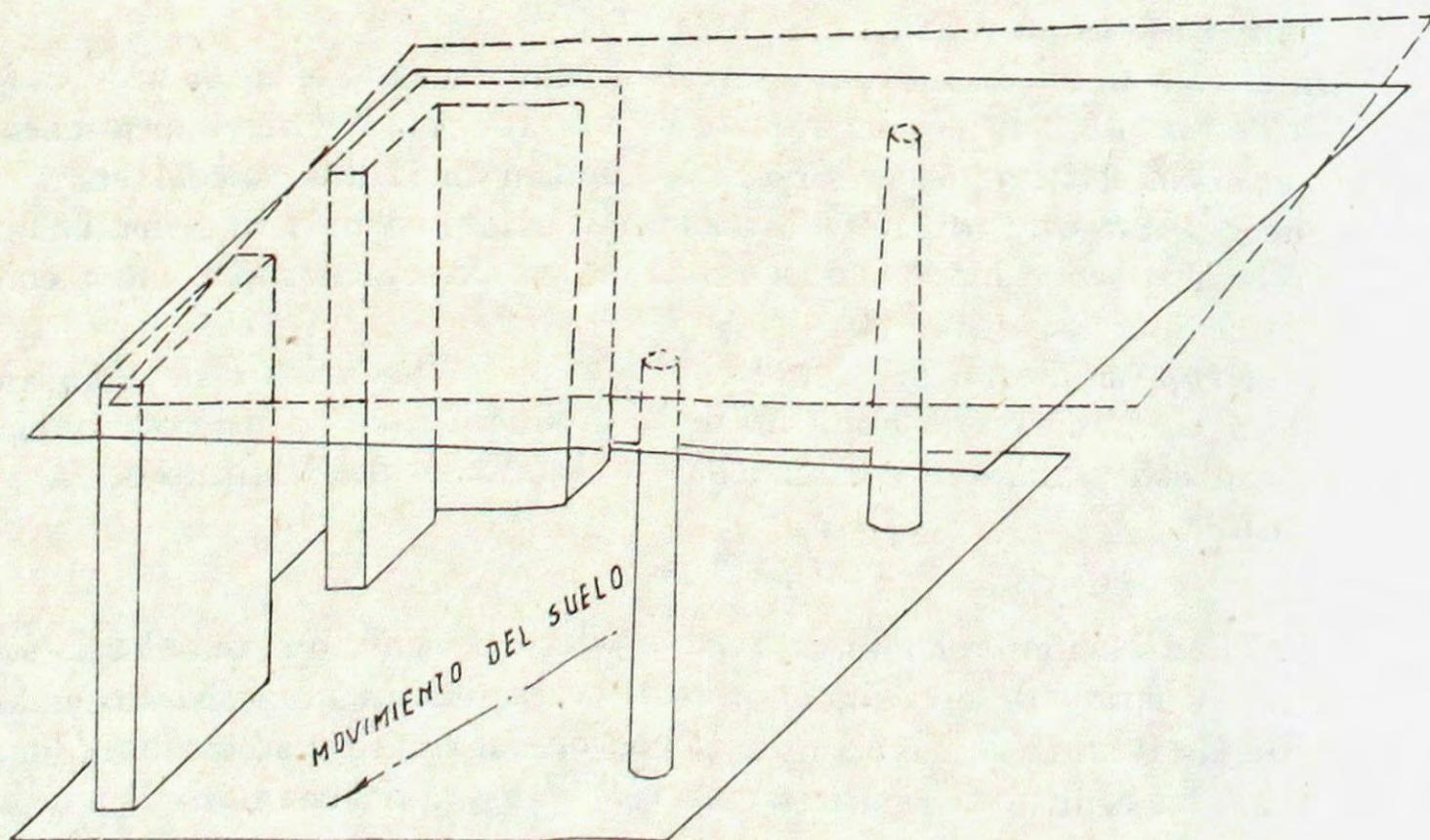
Ese problema, en su aspecto más simple, es el de determinar el comportamiento elástico de un grupo de muros y columnas arbitrariamente espaciados, que se encuentran unidos arriba y abajo por tableros indeformables. El de abajo, sometido a movimientos más o menos caóticos de los temblores, y el de arriba, sometido a las fuerzas de inercia de las masas de los pisos superiores.

Para el caso del viento, las fuerzas de inercia son reemplazadas por la presión que produce en las caras del edificio, manteniendo en todo el concepto de sollicitación de la estructura.

4. Sea «a» el centro de las fuerzas sísmicas que actúan sobre el tablero que une los cabezales de las columnas y muros. Generalmente «a» corresponde al centro de figura del tablero, pues los pesos—y sus fuerzas de inercia— son más o menos uniformemente distribuidos en todos los edificios corrientes.

La posición de «a» queda invariable durante el temblor y sólo cambian las intensidades y direcciones de las fuerzas, que aparecen en «a», por efectos de los diversos movimientos del suelo.

5. Las reacciones individuales de las columnas y muros que sostienen el tablero cambian de intensidad y de dirección, según cambien las posiciones relativas de los dos tableros indeformables que las ligan en sus extremos superior e inferior.



Si el suelo se desplaza en la dirección indicada en la figura, el tablero sobre el cual descansan los pisos superiores se moverá respecto al suelo por la acción de las fuerzas de inercia girando alrededor de un punto «O» de su plano. Como los movimientos sísmicos cambian rápidamente de dirección, podemos decir que «O» es el centro instantáneo de rotación del tablero.

Los muros harán que los movimientos relativos al suelo del tablero superior sean menores en sus vecindades que en el costado de las columnas que relativamente son mucho más elásticas. Por esto, el punto «O» quedará ubicado en las inmediaciones de la zona que contiene los elementos más rígidos.

6. Si conocemos la ubicación del centro instantáneo de rotación y el ángulo en que gira el tablero para una posición determinada de la fuerza sísmica, conoceremos las magnitudes, posiciones y direcciones de cada una de las fuerzas que las deformaciones de las columnas producen sobre el tablero.

7. La suma vectorial de las reacciones individuales de las columnas sobre el tablero superior tendrá una resultante que será coincidente, opuesta y de igual magnitud que la componente horizontal de la acción sísmica. Esto equivale a decir que siempre la línea de acción de la resultante H pasará por el centro de gravedad de las reacciones individuales de las columnas y, por lo tanto, será siempre un eje de simetría de las reacciones.

Partiendo de la base de que no conocemos a priori la posición de los centros de giro del tablero (N.º 6), insistiremos que no basta que conozcamos las acciones resultantes del conjunto de elementos resistentes para determinar el movimiento del tablero. Necesitamos conocer en magnitud y dirección los movimientos individuales de los cabezales de las piezas resistentes para establecer las fuerzas cuyo conjunto se opone a la fuerza sísmica H . De todos ellos sólo podemos decir que por los efectos de ligazón del tablero rígido, las reacciones individuales descompuestas en el sentido de la fuerza H forman un conjunto de fuerzas iguales y contrarias a ésta y que las reacciones normales a la dirección de H se neutralizan por efecto de la indeformabilidad del tablero.

8. La fuerza F que una columna o muro produce al correrse forzadamente su extremo superior en un movimiento Δ con respecto a su pie, depende: 1.º) del módulo de Young E del material que la compone; 2.º) de su forma y sección; 3.º) de la altura de la columna o muro; 4.º) de las condiciones de unión a los tableros que toman sus extremos; 5.º) de las armaduras contra deformaciones al corte que lleva interiormente la pieza, y 6.º) de la orientación de los ejes de rigidez de la pieza con respecto al movimiento que soporta.

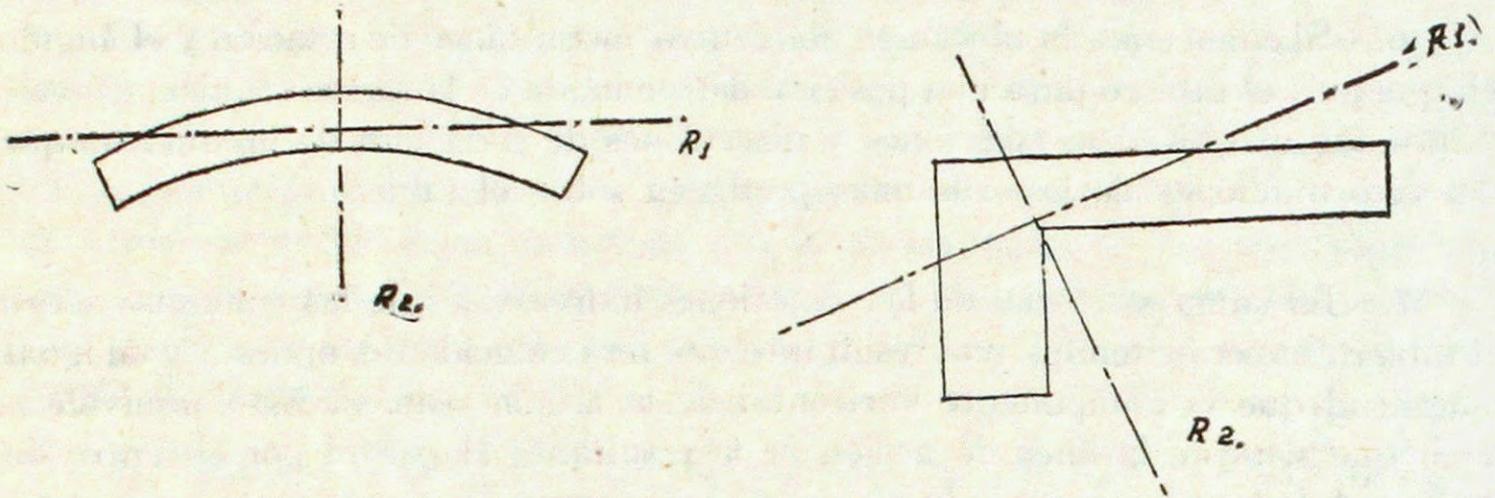
Los puntos 1 a 5 inclusive han sido tratados en publicaciones del autor aparecidas en el número de julio-agosto de 1947 de los Anales del Instituto de Ingenieros.

Para simplicidad, en el símbolo R agruparemos las condiciones 2, 3, 4 y 5 señaladas anteriormente. Entonces la relación fundamental entre desplazamientos, rigideces reales y dirección de los movimientos es

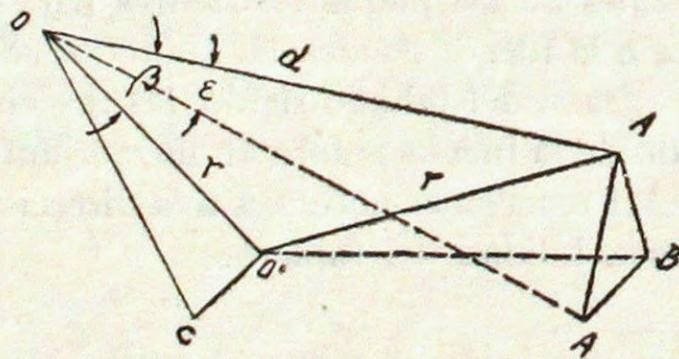
$$F = - ER \Delta \cos \alpha$$

9. Generalmente, cada columna o muro tiene dos ejes de rigideces R ortogonales y distintos que habrán de considerarse en los cálculos si se producen movimientos que den componentes apreciables y que su producto $ER_1\Delta\cos\alpha$ o $ER_2\Delta\cos\alpha$ no sean muy pequeños.

Así, un muro curvo o un muro esquina poseen dos ejes de rigideces. En cambio, en una columna de sección circular estos dos ejes son iguales e independientes de la dirección del movimiento. Para cada columna y muro habrá que determinar los ejes principales de rigideces. La teoría y método para obtenerlas se suponen conocidos.



10. El movimiento de un punto específico cualquiera del tablero debido a una rotación « ϵ » alrededor del centro de giro « O », es igual a la suma vectorial del movimiento de otro punto del tablero O' debido a la rotación en « O » más un giro « ϵ » alrededor de este nuevo centro.



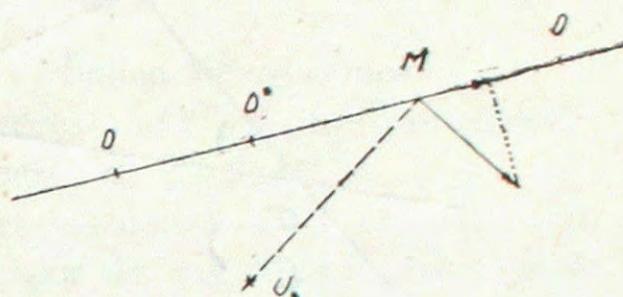
Sea A un punto cualquiera del tablero; A' su posición final debido al giro ϵ en O . Sea O' el nuevo centro; $\overline{O'C} = r \cdot \epsilon = \overline{BA'}$. Demostraremos que $\overline{AB} = r' \epsilon = \overline{O'A} \cdot \epsilon$

El $\Delta AA'B$ es semejante al OAO' por tener sus lados $AA' \perp OA$, $BA' \perp OO'$, $AB \perp O'A$ y cada uno de sus lados se encuentran amplificadas en la misma razón ϵ . Al efecto $\overline{AA'} = \epsilon \overline{OA}$; $\overline{AB} = \epsilon \overline{O'A}$; $\overline{BA'} = \epsilon \overline{OO'}$. Como las líneas $OA-AO'$ y OO' forman un polígono cerrado, su semejante y homólogo $AA'B$ también será cerrado.

Esto nos indica que no podemos dar por resuelto el cálculo del sistema descomponiendo una fuerza H por otra fuerza y un torque aplicado a cierto centro de giro porque habrá que sumar vectorialmente el movimiento de ese centro que depende de la posición del verdadero centro O y de la magnitud del giro ϵ que, a su vez, depende de la posición de la fuerza y de las cualidades elásticas del sistema que van variando para cada centro de giro del tablero.

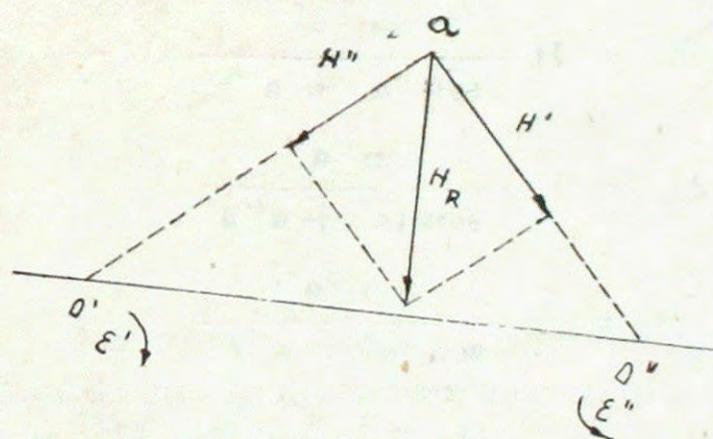
11. Sea O' el centro de rotación de un plano indeformable que gira alrededor de la normal en O' el ángulo ϵ' . Sea O'' otro centro que gira ϵ'' sobre la normal en O'' . El centro de la rotación resultante caerá necesariamente en la recta $O'O''$.

Sea un punto M cualquiera de la recta $O'O''$. Las rotaciones debidas a los giros en O' y O'' producen movimientos en M normales a la recta que une M con el respectivo centro de giro y, como ambas rectas coinciden con la recta $O'O''$, el movimiento resultante de M quedará siempre sobre la normal a esa línea.



Si el centro de rotación resultante, O , quedara fuera de la línea $O'O''$, en U por ejemplo, el movimiento de M necesariamente será normal a su brazo de giro UM y el movimiento de M daría una componente en el sentido de la línea de los centros $O'O''$, lo que es incompatible con las rotaciones en O' y O'' .

12. Hemos llamado «a» el centro de las fuerzas que los movimientos del suelo provocan en la zona del edificio ubicado sobre las columnas del primer piso; sea H' una posición específica de H . Sea O' el centro de giro del tablero y ϵ' el giro que produce esa fuerza H' .



Supongamos que cambie la dirección del sismo de tal modo que la nueva fuerza de inercia pase por O' . Llamaremos H'' esta nueva fuerza. Sea O'' el centro de giro que corresponde a H'' y sea ϵ'' el giro correspondiente.

Como hemos supuesto que H'' pasa por el centro de giro O' de la fuerza H' esta última fuerza no genera trabajo; en consecuencia, su línea de acción debe

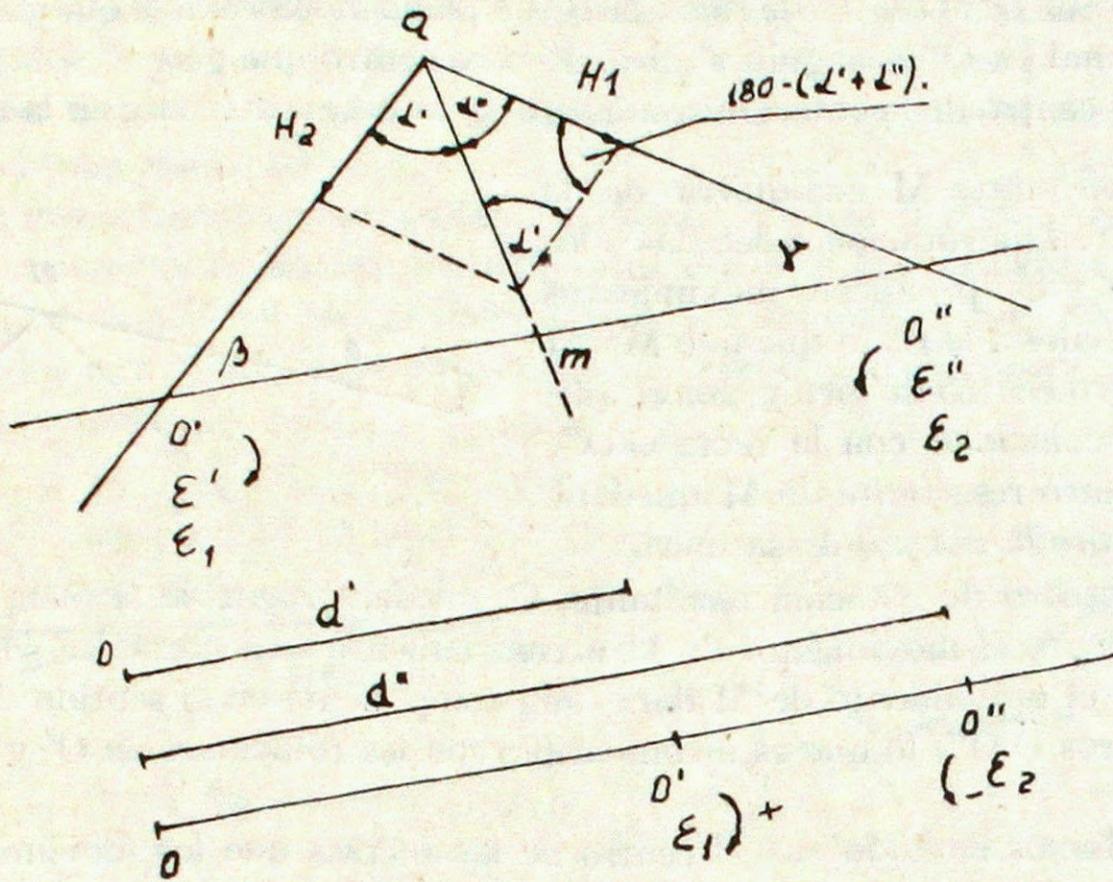
cortar la línea $O'O''$ en un punto tal que sea el centro de giro O'' .

Sea \bar{H}_R el vector resultante de H' y H'' que, para nuestro análisis supondremos que se producen simultáneamente. Para \bar{H}_R tendremos un tercer centro de giro que llamaremos O . La posición de O puede considerarse como centro de giro resultante de las rotaciones ϵ' en O' y ϵ'' en O'' . Hemos visto que O deberá encontrarse en la línea $O'O''$ (N.º 11). Como el centro «a» de las acciones sísmicas es fijo (N.º 4) y las fuerzas pueden tomar cualquier dirección, tenemos:

El lugar geométrico de los centros de rotación del tablero de un edificio es una recta invariable que tiene una sola posición.

13 Según las normas de cálculo la fuerza H es proporcional al peso del edificio y puede tomar cualquier dirección. Diremos que ella gira alrededor de «a» y el tablero gira alrededor de la línea de centros «O». A cada posición de H corresponde un punto y uno solo de esa recta.

En una posición intermedia cualquiera de la fuerza H , am por ejemplo, el centro de giro O tendrá una posición que determinaremos



$$\frac{H}{\text{sen } [180^\circ - (\alpha' + \alpha'')]} = \frac{H_1}{\text{sen } \alpha'}$$

$$H_1 = H \frac{\text{sen } \alpha'}{\text{sen } (\alpha' + \alpha'')}$$

$$H_2 = H \frac{\text{sen } \alpha''}{\text{sen } (\alpha' + \alpha'')}$$

$$\epsilon_1 = \epsilon' \frac{H_1}{H} = \epsilon' \frac{\text{sen } \alpha'}{\text{sen } (\alpha' + \alpha'')}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon'' \frac{H_2}{H} = \epsilon'' \frac{\text{sen } \alpha''}{\text{sen } (\alpha' + \alpha'')}$$

$$\epsilon_1 d' + \epsilon_2 d'' = 0$$

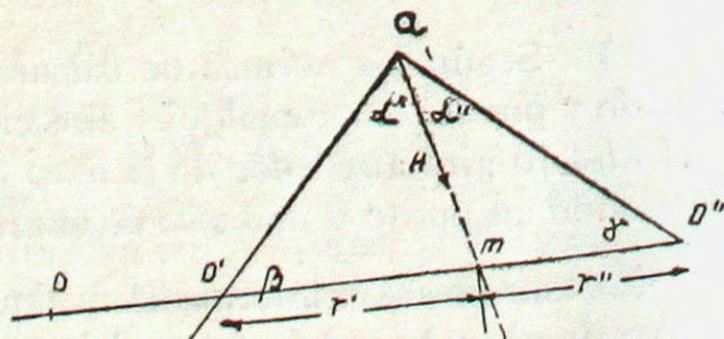
$$\epsilon' \frac{\text{sen } \alpha'}{\text{sen } (\alpha' + \alpha'')} \cdot d' + \epsilon'' \frac{\text{sen } \alpha''}{\text{sen } (\alpha' + \alpha'')} \cdot d'' = 0$$

Ecuación 1)
$$\frac{d'}{d''} = - \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \frac{\text{sen } \alpha''}{\text{sen } \alpha'}$$

14. Llamando $r' = \overline{mO'}$ y $r'' = \overline{mO''}$ y considerando como positiva la dirección $O'O''$ de la figura, deducimos:

$$r' = - \frac{\text{sen } \alpha'}{\text{sen } \beta} \overline{am}$$

$$r'' = + \frac{\text{sen } \alpha''}{\text{sen } \gamma} \overline{am}$$

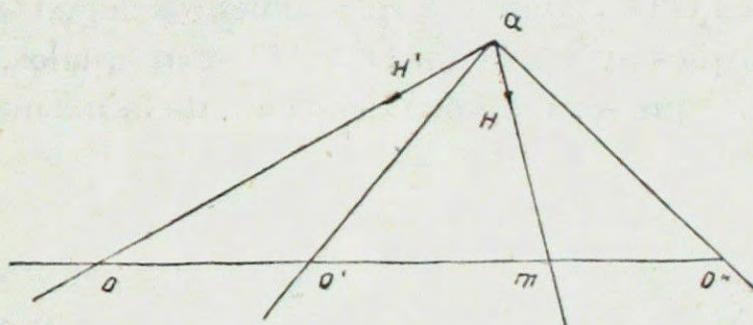


$$\text{Ecuación 2)} \quad \frac{r''}{r'} = - \frac{\text{sen } \alpha'' \text{ sen } \beta}{\text{sen } \gamma \text{ sen } \alpha'}$$

$$\text{Ecuación 3)} \quad \frac{d'}{d''} : \frac{r''}{r'} = + \frac{\epsilon'' \text{ sen } \alpha''}{\epsilon' \text{ sen } \alpha'} : \frac{\text{sen } \alpha'' \text{ sen } \beta}{\text{sen } \gamma \text{ sen } \alpha'} = + \frac{\epsilon'' \text{ sen } \gamma}{\epsilon' \text{ sen } \beta} = \text{Cte}$$

- 1.º) La Cte debe ser negativa porque ϵ' y ϵ'' tienen signos opuestos.
- 2.º) Cuando la fuerza H se acerca a la dirección $\alpha O''$, el punto m se corre hacia O'' y el centro de giro resultante, O, se acerca al punto O' .
- 3.º) Cuando el punto m se encuentra entre los puntos O' y O'' , el centro de giro resultante O es exterior al tramo $O'O''$, por ser negativa la relación de posiciones de los puntos conjugados.
- 4.º) La relación entre los valores d'/d'' y r''/r' es constante, es decir, independiente de la dirección de la fuerza sísmica H.

15. Si desde «a» agregamos una nueva fuerza H' en la dirección αO en que O es el centro de giro que corresponde a la fuerza H, observamos que H cortará a su vez el centro de giro que corresponde a H' . Al efecto, el trabajo que efectúa H bajo la acción de H' es nulo y por la ley de acciones recíprocas también será nulo el trabajo que hace H' bajo la acción de H.



Los centros de giro O y los puntos m en que la fuerza H corta la línea de los centros de giro son intercambiables, propiedad similar a las de puntos en involución m y O y de bases O' y O'' .

16. De la ecuación 1) del n.º 13 se deduce que existe cierta posición de la fuerza H y, por lo tanto, del punto m que llamaremos m_0 , tal que $\epsilon'' \text{ sen } \alpha_0'' = - \epsilon' \text{ sen } \alpha_0'$ y la relación $\frac{d'_0}{d''_0}$ será igual a + 1. Entonces $d'_0 = d''_0$ y, para que esto suceda, es necesario que d'_0 y d''_0 sean infinitamente grandes.

$$\frac{d'_0}{d''_0} = \frac{\epsilon'' \text{ sen } \alpha''_0}{\epsilon' \text{ sen } \alpha'_0} = + 1 \text{ es decir}$$

$$\text{Ecuación 4)} \quad \frac{\epsilon'}{\epsilon''} = + \frac{\text{sen } \alpha''_0}{\text{sen } \alpha'_0}$$

Para estos valores, la ecuación 2) del N.º 14 vale:

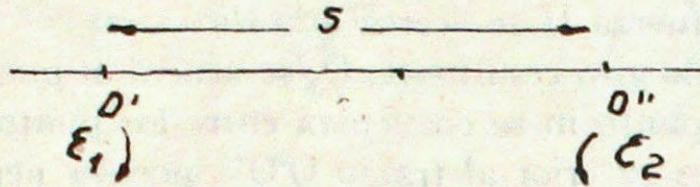
$$\text{Ecuación 5)} \quad \frac{r''_0}{r'_0} = - \frac{\text{sen } \alpha''_0 \text{ sen } \beta}{\text{sen } \alpha'_0 \text{ sen } \gamma} = - \frac{\epsilon' \text{ sen } \beta}{\epsilon'' \text{ sen } \gamma}$$

17. Para que el centro de rotación resultante de dos giros ϵ_1 y ϵ_2 en O' y O'' respectivamente, se traslade al infinito, es necesario que todos los puntos del

tablero se trasladen paralelamente a sí mismo en la misma cantidad. Esto es sólo posible cuando los giros $\epsilon_1 = -\epsilon_2$, como es fácil deducir de la figura.

Traslación de O' debido a la rotación $-\epsilon_2$ en O''

$$\downarrow -\epsilon_2 \times \overline{O''O'} = -\epsilon_2 (S)$$

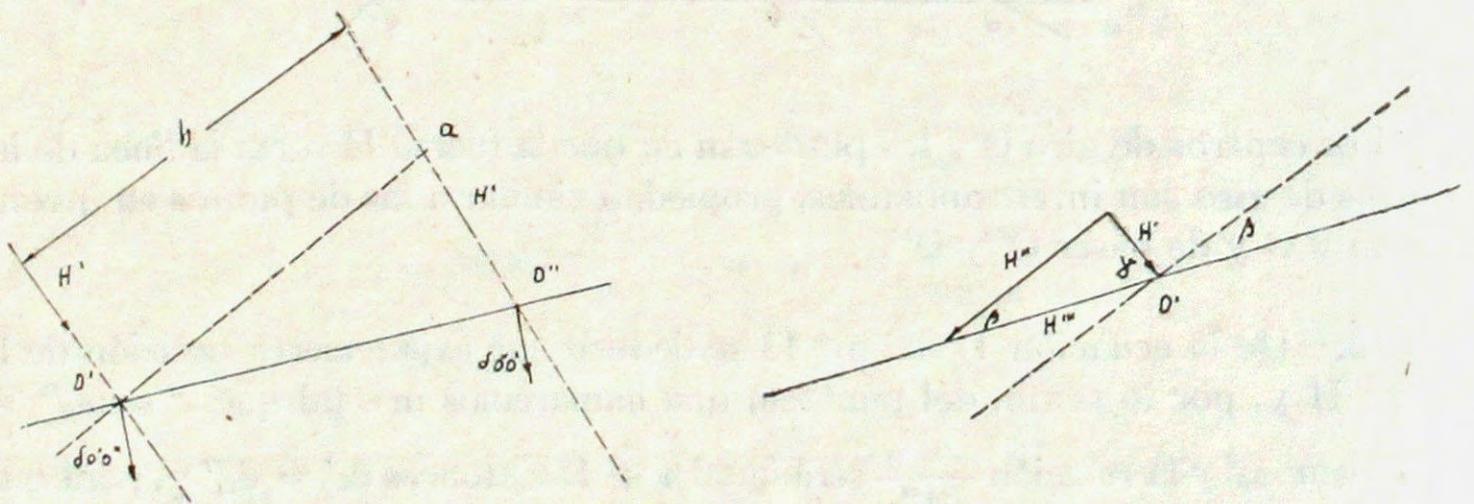


Traslación de O'' hacia abajo debido a la rotación $+\epsilon_1$ en O'

$$\downarrow +\epsilon_1 \times S \text{ entonces } \epsilon_1 = -\epsilon_2$$

18. Hemos establecido en el n.º 11 que ϵ' es la rotación que produce en O' el torque hH' producida por la fuerza $H' = H$ aplicada en O'' , esta rotación hace desplazarse el punto O'' en la cantidad $\delta o''o'$. Si aplicamos en O'' el mismo torque produciríamos en O'' un giro ϵ_2 que hará mover el punto O' en la cantidad $\delta o'o''$ normal a la línea $O'O''$. Ambos desplazamientos deben tener el mismo valor.

Para que los torques aplicados en O' y O'' sean iguales, trazamos por O' la paralela a la recta aO'' que será la línea de acción de la misma fuerza H' que produzca igual torque.



La fuerza H' puede descomponerse en las dos direcciones: $O'O''$ y aO' . Tendríamos que los componentes cumplen con la relación

$$\frac{H'}{\text{sen } \beta} = \frac{H''}{\text{sen } \gamma} = \frac{H'''}{\text{sen } \alpha}$$

Ecuación 6)
$$H'' = H' \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \beta}$$

La tercera componente, H''' , no interviene en el giro de O'' por pasar por el punto O'' . Entonces el torque en O'' que produce un giro $\epsilon_2 = -\epsilon_1$ es el producido por la fuerza H'' , obrando en la dirección aO' .

Para que la componente H'' de H alcance el valor H que supusimos producía la rotación ϵ'' en O'' cuando actuaba según aO' ; la fuerza debe ampliarse en la razón $\text{sen}\beta/\text{sen}\gamma$ que es la inversa de $H''/H' = \text{sen}\gamma/\text{sen}\beta$ (ecuación 6) que sólo produce la rotación $\epsilon_2 = \epsilon_1$. Entonces, entre las rotaciones $-\epsilon''$ y ϵ' existe la relación

$$\text{Ecuación 7) } \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = - \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma}$$

y la ecuación 3 del N.º 14 se transforma en

$$\text{Ecuación 8) } \frac{d'}{d''} : \frac{r''}{r'} = - \frac{\text{sen } \beta \text{ sen } \gamma}{\text{sen } \gamma \text{ sen } \beta} = - 1$$

Aplicando esta relación al caso de rotación al punto al infinito, obtenemos que $r''_0 = -r'_0$ que indica que el punto m se coloca en el punto m_0 central, del trazo $O'O''$.

19. Entre las distancias d' y d'' del centro de giro O a los puntos O' y O'' , y las distancias r' y r'' del punto conjugado m a esas mismas bases O' y O'' , hemos obtenido una relación involutiva de carácter armónico por ser de valor igual a -1 pero que no es tal, porque el orden de las distancias r' y r'' aparecen invertidas. La relación realmente involutiva y armónica de los conjugados O_1m respecto a las bases O' y O'' es

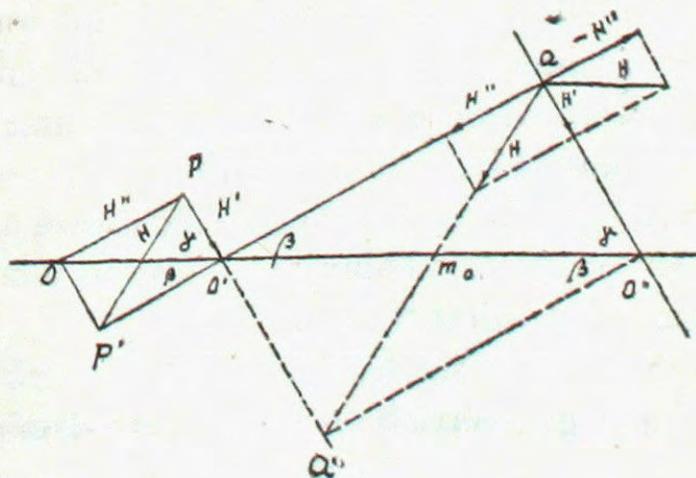
$$\text{Ecuación 9) } \frac{d'}{d''} : \frac{r'}{r''} = - 1$$

Esta involución la cumple el punto simétrico m' de m con respecto al punto central C del trazo $O'O''$. Las distancias de m' a las bases O' y O'' son respectivamente r' y r'' , como se constata fácilmente.

Los centros de giro y los puntos simétricos respecto al punto central en que la fuerza sísmica H corta la línea de los centros de giro, son conjugados armónicos de los puntos O' y O'' de la involución, vértices del triángulo autopolar O' a O''

20. Los componentes H' y $H'' = H' \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \beta}$ (n.º 17) tienen una resultante

H . Se observa que las relaciones $\frac{H'}{\text{sen } \beta} = \frac{H''}{\text{sen } \gamma} = \frac{H'''}{\text{sen } \alpha}$ corresponden a



los lados y ángulos de los triángulos homotéticos $O'aO''$ y OPO' . Si se trazan las paralelas $O''a'$ y $O'a'$, se obtiene el paralelogramo $aO'a'O''a$, en que las diagonales $O'O''$ y aa' se cortan en sus puntos medios mO confirmando que es el punto central de la involución armónica de base $O'O''$. Si construimos el paralelogramo $OPO'P'$ la diagonal PP' representa la resultante H_m de las fuerzas H' y H'' .

La diagonal $aa' = H$ y los lados aO'' y aO' representan a la escala $aa' = H$, las componentes de la fuerza H y sus posiciones que producen una traslación paralela. También representan la fuerza H paralela a la línea de los centros de giros, pero a escala $O'O'' = H$.

21. En la dinámica de los sólidos se establece que los puntos de un cuerpo sometido a una fuerza, se traslada paralelamente a sí mismo cuando la línea de acción de la fuerza pasa por el centro de las fuerzas de inercia que coincide con el centro de gravedad de las masas. A la vez se demuestra que la aplicación de un torque produce un giro del sistema alrededor del mismo centro, cuya posición en tal caso permanece invariable.

Podemos aplicar estos conceptos a la fuerza, o al sistema de fuerzas que provoca una traslación sin giro, diciendo que existe un cierto punto C del tablero al que aplicándole una fuerza sólo se produce una traslación paralela de todos sus puntos. Este punto tendrá, además, la propiedad de que si se aplica un torque al tablero, éste girará a su alrededor provocando un sistema de reacciones entre los elementos de liga deformados que equilibren el torque aplicado. Como existe sólo un punto sobre el cual pueda girar al aplicarle un torque las consecuencias recíprocas son evidentes:

El centro de giro del tablero soportado por ligazones elásticas es el punto que permanece inmóvil al aplicar un torque sobre el tablero.

Toda fuerza que corta el centro de giro del tablero provoca una traslación paralela.

22. Deberán tenerse presentes otras propiedades del centro de giros C , al que daremos el nombre más apropiado de «centro elástico».

1.º) No es el centro de gravedad de los pesos elásticos « R ».

2.º) El movimiento de traslación del centro elástico C causado por la fuerza aplicada en él, será siempre de igual magnitud, dirección y sentido que el que produciría en C una fuerza igual y paralela aplicada en cualquier punto finito o infinito del tablero. Esta es una consecuencia inmediata del principio que permite reemplazar una fuerza por un sistema equivalente de fuerza y torque aplicado al centro elástico.

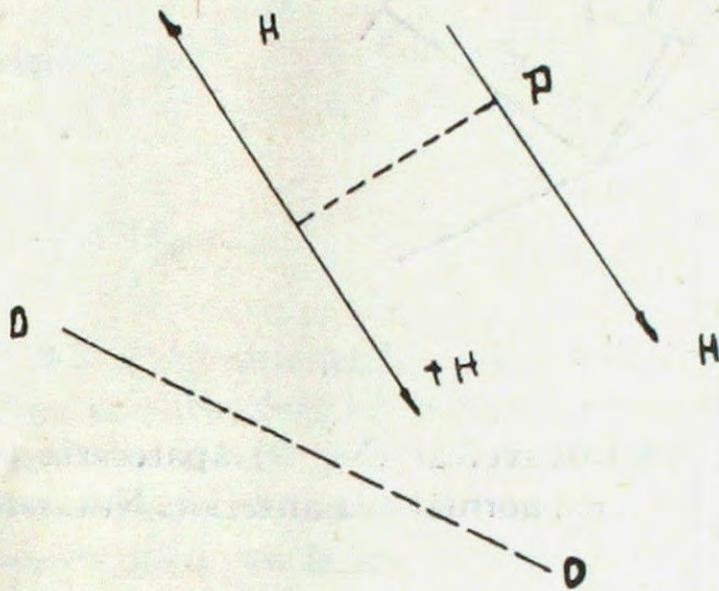
3.º) Para que sólo exista giro en C es condición necesaria que el sistema de fuerzas solicitantes sea únicamente un torque. Como un torque puede representarse por una fuerza infinitamente pequeña y lejana, el centro elástico C puede definirse como el centro de rotación que corresponde a una fuerza infinitamente pequeña cuya línea de acción es la recta al infinito.

4.º) Si se aplica un torque finito al tablero, éste girará alrededor del centro C provocando reacciones en los muros y columnas tales que ellas formen un polígono cerrado, en consecuencia, de resultante nula.

5.º) El concepto de un giro sin traslación del tablero es incompatible con la condición de que el lugar geométrico de las fuerzas sísmicas sea una circunferencia de radio H y de centro « a » (N.ºs 4 y 13).

6.º) El giro que una fuerza produce en C —o en cualquier otro punto del plano— es igual al giro que produce en el centro instantáneo de rotación O del sistema que corresponde a la posición y dirección de la fuerza (N.º 10). En consecuencia, se puede medir el torque que la fuerza produce en C, calcular su giro y aplicarlo en O.

7.º) La dirección de traslación de C sólo coincide con la dirección de la fuerza cuando ésta coincide con uno de los ejes principales de la elipse de elasticidad del sistema.



8.º) Cuando el centro «a» de las fuerzas sísmicas es coincidente con el centro elástico «c», el edificio se trasladará paralelamente a sí mismo, sin efectuar ningún giro, cualquiera que sea la dirección del temblor. Esta coincidencia de los puntos «a» y «c» suele presentarse en edificios simétricos y, en tales casos, los desplazamientos serán normales a las direcciones conjugadas con las líneas de acciones de las fuerzas que giran alrededor de

«c». El lugar geométrico de los respectivos centros instantáneos de giros será la elipse envolvente de las polares al infinito conjugadas con las direcciones de las fuerzas que cortan el centro de la Elipse de Elasticidad del Sistema.

23. En el N.º 12 demostramos que el lugar geométrico de los centros instantáneos de giros O es una recta que tiene una sola posición. Esa recta, OO, no puede pasar por el centro elástico C si la línea de acción de la fuerza H tiene puntos finitos. Agregando en C dos fuerzas + H y - H se forma un torque que producirá un giro del tablero, la fuerza sobrante + H producirá una traslación paralela (N.º 21 y 3.º del N.º 22). La combinación de una traslación de C con un giro sobre él dará un centro de rotación no coincidente con C. Además, ese centro O se encontrará siempre en una posición más lejana de H que el punto C.

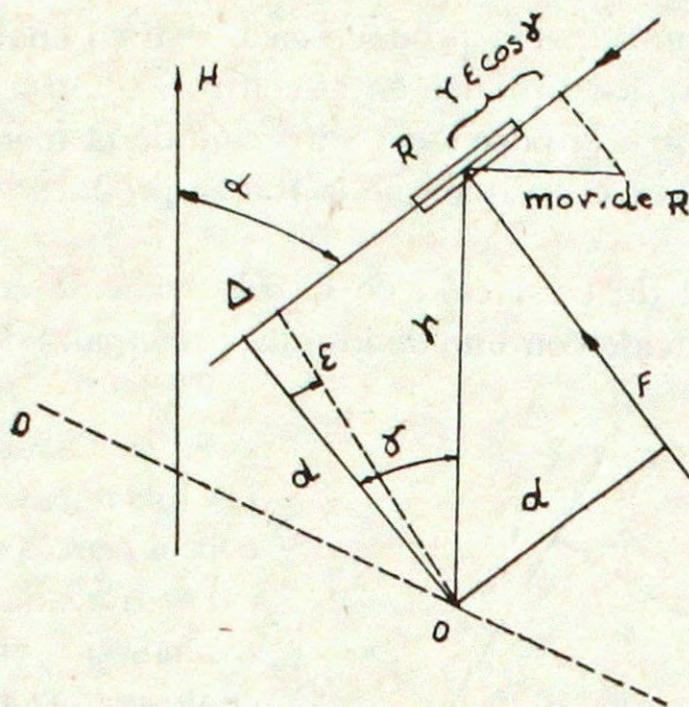
Al efecto, tracemos desde C la perpendicular CP a la fuerza H y examinaremos el movimiento de P; ese movimiento será la resultante de una traslación vectorialmente igual a la de C y a la rotación del tablero alrededor de C. La resultante de ambos vectores será siempre mayor que el vector traslación de C.

La línea de centros instantáneos de rotación OO estará ubicada al lado opuesto del punto «a» con respecto al centro elástico C.

24. Si el tablero gira en O el ángulo ϵ el muro representado por la rigidez R se mueve en dirección normal al radio «r» y el movimiento en el sentido axial de R es $\Delta = E \epsilon \cos \gamma$. La fuerza que aparece como consecuencia de la deformación del muro es

$$F = - E \epsilon R r \cos \gamma$$

pero entre la distancia «d» del punto O a la línea de acción de R y el radio r existe la relación $d = r \cos \gamma$ y la fuerza F valdrá:



Ecuación 10)
$$F = - E \epsilon R d$$

Si el muro presentara alguna rigidez transversal (N.º 9) aparecería otra fuerza $F' = - ER'd'$, cuya línea de acción sería normal a la anterior. Notaremos en consecuencia:

Para el estudio y cálculo de los sistemas de fuerzas sólo intervienen las líneas de acción de rigideces y no sus posiciones.

25. Proyectando F sobre la línea de acción de la fuerza H, en sentido paralelo y normal a ella,

$$\begin{aligned} \parallel F \cos \alpha &= - E \epsilon R d \cos \alpha \\ \perp F \sin \alpha &= - E \epsilon R d \sin \alpha \end{aligned}$$

La suma de las proyecciones da:

Ecuación 11)
$$\begin{aligned} H &= - E \epsilon \Sigma R \cos \alpha \\ 0 &= \Sigma R d \sin \alpha \end{aligned}$$

El ángulo de rotación amplificado E veces

Ecuación 12)
$$E \epsilon = - \frac{H}{\Sigma R d \cos \alpha}$$

El torque motriz y el resistente se equilibran en el centro instantáneo de rotación O

$$H \cdot h + \Sigma F \cdot d = 0$$

$$H \cdot h = + E \epsilon \Sigma R d^2$$

Ecuación 13)
$$h = \frac{\Sigma R d^2}{\Sigma R d \cos \alpha}$$

Por la propiedad del centro elástico que señalamos en el 6.º del N.º 22, podemos obtener una relación entre los momentos de inercia polar correspondiente a C y el correspondiente al centro instantáneo de rotación O producido por una posición determinada de la fuerza H.

Ecuación 14) Giro en O $E\epsilon_0 = \frac{Hh_0}{\Sigma R d_0^2}$

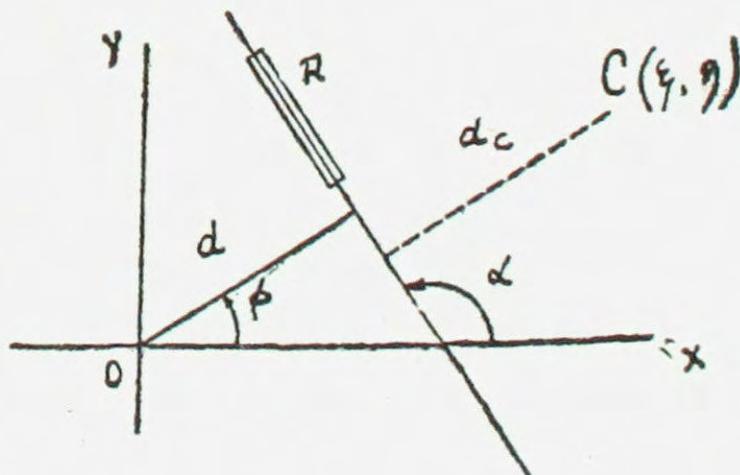
Ecuación 15) Giro en C $E\epsilon_c = \frac{Hh_c}{\Sigma R d_c^2}$

Ecuación 16) $\Sigma E d_0^2 = \frac{h_0}{h_c} \Sigma R d_c^2$

26. Para obtener la posición del centro elástico C aplicaremos el principio de que la naturaleza obtiene sus resultados con el menor esfuerzo posible. Por eso, el tablero bajo la acción de un torque girará alrededor del punto que le presente el menor momento de inercia polar, que es el punto que le permite obtener el mayor giro con la menor oposición.

Recordaremos que el torque es independiente de la situación del centro elástico y, por tanto, las derivadas parciales respecto a abscisas y ordenadas de ese punto en un sistema de eje XY son nulas y no figuran en el cálculo de los valores que hacen mínimo el momento de inercia polar.

Tomemos un punto O cualquiera y un sistema de ejes ortogonales OX, OY orientados arbitrariamente. La línea de acción R tiene por ecuación normal $x \cos \Phi + y \sin \Phi - d = 0$. La distancia del punto C (ξ, η) a la recta es $-d_c = \xi \cos \Phi + \eta \sin \Phi - d$. Se trata de encontrar los valores de ξ y η que hacen mínimo el valor de $R d_c^2$. Para un elemento R tenemos:



$$R d_c^2 = R [\xi^2 \cos^2 \Phi + \eta^2 \sin^2 \Phi + d^2 + 2\xi\eta \sin \Phi \cos \Phi - 2\xi d \cos \Phi - 2\eta d \sin \Phi]$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = 2R [\xi \cos^2 \Phi + \eta \sin \Phi \cos \Phi - d \cos \Phi] \qquad \frac{\partial^2}{(\partial \xi)^2} = 2 R \cos^2 \Phi > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = 2R [\eta \sin^2 \Phi + \xi \sin \Phi \cos \Phi - d \sin \Phi] \qquad \frac{\partial^2}{(\partial \eta)^2} = 2 R \sin^2 \Phi > 0$$

$$\text{Ecuación 17)} \left\{ \begin{array}{l} \xi \Sigma R \cos^2 \Phi + \eta \Sigma R \sin \Phi \cos \Phi - \Sigma R d \cos \Phi = 0 \\ \xi \Sigma R \sin \Phi \cos \Phi + \eta \Sigma R \sin^2 \Phi - \Sigma R d \sin \Phi = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Ecuación 18)} \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{\Sigma R d \cos \Phi \Sigma R \sin^2 \Phi - \Sigma R d \sin \Phi R \sin \Phi \cos \Phi}{\Sigma R \sin^2 \Phi \Sigma R \cos^2 \Phi - (\Sigma R \sin \Phi \cos \Phi)^2} \\ \eta = \frac{\Sigma R \sin \Phi R \cos^2 \Phi - \Sigma R d \cos \Phi \Sigma R \sin \Phi \cos \Phi}{\Sigma R \sin^2 \Phi \Sigma R \cos^2 \Phi - (\Sigma R \sin \Phi \cos \Phi)^2} \end{array} \right.$$

También se puede encontrar la posición de C valiéndose de la propiedad de que una rotación con ese centro produce reacciones cuya resultante es nula. Al efecto, según ecuaciones del N.º 25

$$\text{Ecuación 19)} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma R d \cos \alpha = 0 \\ \Sigma R d \sin \alpha = 0 \end{array} \right.$$

reemplazando «d» por su valor $\xi \cos \Phi + \eta \sin \Phi - d$ y considerando que

$$\alpha = 180^\circ - (90^\circ - \Phi) = 90^\circ + \Phi$$

tenemos

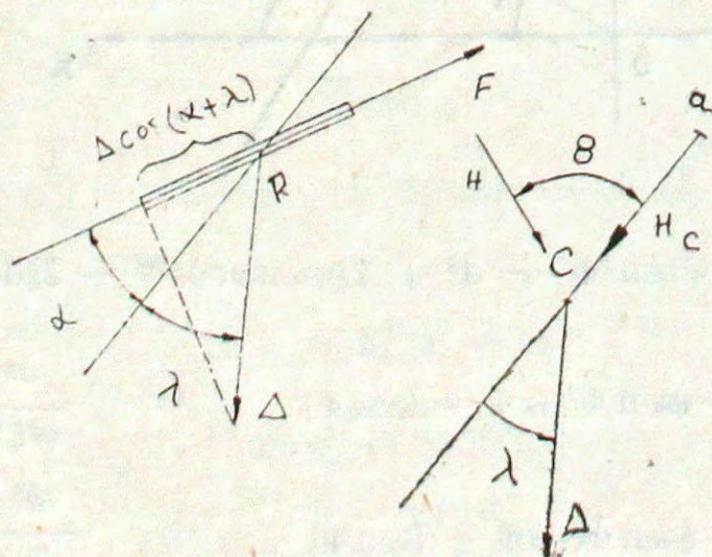
$$\begin{aligned} \Sigma R (\xi \cos \Phi + \eta \sin \Phi - d) (-\sin \Phi) &= 0 \\ \Sigma R (\xi \cos \Phi + \eta \sin \Phi - d) (+\sin \Phi) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ecuación 17)} \left\{ \begin{array}{l} \xi \Sigma R \sin \Phi \cos \Phi + \eta \Sigma R \sin^2 \Phi - \Sigma R d \sin \Phi = 0 \\ \xi \Sigma R \cos^2 \Phi + \eta \Sigma R \sin \Phi \cos \Phi - \Sigma R d \cos \Phi = 0 \end{array} \right.$$

Hemos obtenido dos ecuaciones idénticas a las 17) Entonces:

El centro elástico C tiene las propiedades correlativas de poseer el mínimo momento de inercia polar y que un giro alrededor de él produce sólo un torque en el conjunto de las fuerzas de ligazón causada por las deformaciones de los elementos que soportan el tablero

27. Sea H_c la fuerza cuya línea de acción une al centro «a» de acciones sísmicas con el centro elástico «C». Todos los puntos del tablero se desplazarán paralelamente en una distancia Δ . Llamemos λ el ángulo que hará el movimiento con la dirección de la fuerza.



El movimiento de R en dirección de R será $\Delta \cos (\alpha + \lambda)$ y la fuerza que producirá en R y en la dirección de R será

$$F = - E \Delta \cos (\alpha + \lambda) R$$

Proyectando esta fuerza paralela y normalmente a H_c

$$F \cos \alpha = - E \Delta R \cos (\alpha + \lambda) \cos \alpha$$

$$F \operatorname{sen} \alpha = - E \Delta R \cos (\alpha + \lambda) \operatorname{sen} \alpha$$

Aplicando estas relaciones a los elementos R, obtenemos

$$\text{Ecuación 20)} \quad H_c = - E \Delta \Sigma R \cos (\alpha + \lambda) \cos \alpha$$

$$0 = \Sigma R \cos (\alpha + \lambda) \operatorname{sen} \alpha$$

reemplazando $\cos (\alpha + \lambda)$ por $\cos \alpha \cos \lambda - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \lambda$ en la segunda ecuación y despejando la función λ

$$\text{Ecuación 21)} \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\Sigma R \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\Sigma R \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

28. Tomando como referencia la línea aC y moviendo H sobre C podemos encontrar la posición de H que hace que el movimiento del tablero tenga la misma dirección que la fuerza. Sea θ ese ángulo; entonces $\lambda = 0$ y el ángulo que hace la fuerza F con la nueva posición R con respecto a H será $\alpha + \theta$ en vez de α

$$\operatorname{tg} \lambda = 0 \quad \begin{aligned} \Sigma R \operatorname{sen} (\alpha + \theta) \cos (\alpha + \theta) &= 0 \\ \Sigma R \operatorname{sen} 2(\alpha + \theta) &= 0 \end{aligned}$$

despejando 2θ tenemos

$$\text{Ecuación 22)} \quad \operatorname{tg} 2\theta = - \frac{\Sigma R \operatorname{sen} 2\alpha}{\Sigma R \cos 2\alpha}$$

relación que da los valores 0 y $\frac{\pi}{2} + 0$

que corresponden a los ejes principales de la elipse de elasticidad del sistema. Nótese que para obtenerlos hay que sacar la fuerza del punto «a» que es el origen de ella.

29. La ecuación 21) nos da la dirección del desplazamiento y, en consecuencia, la dirección de la línea de centros de rotación que necesariamente es normal al movimiento del tablero.

Sabemos (N.º 23) que la línea O — O quedará más allá de C respecto al centro «a» de las fuerzas de inercia. La distancia h_a de «a» la obtenemos aplicando en O — O una fuerza unitaria. Como esta fuerza corta todos los posibles centros de giros correspondientes a las fuerzas de inercia, por la ley de las acciones recíprocas el tablero girará alrededor de «a». La ecuación 13) del N.º 25 nos da la distancia h_a



$$\text{Ecuación 13 bis)} \quad h_a = \frac{\Sigma R d_a^2}{\Sigma R d_a \cos \alpha'}$$

30. Así establecida la posición de la línea OO se pueden obtener los puntos O' y O'' bases de la involución $(OmO'O'') = -1$ y también dibujar el triángulo autopolar $O'aO''$. Tomamos un punto cualquiera O sobre esa línea que lo utilizaremos como centro de giro del sistema y las fuerzas que provoque las proyectaremos sobre un sistema de ejes con centro en O y Ox coincidiendo con la línea OO .

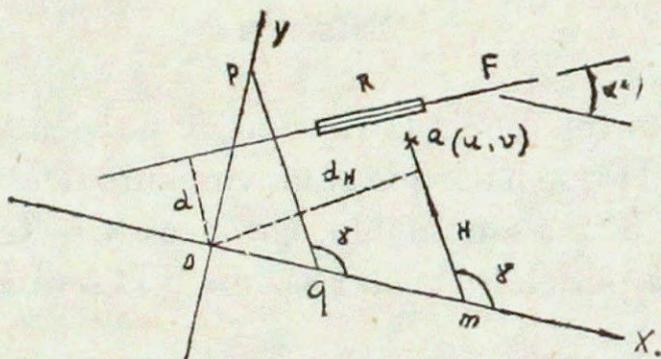
Camino de R

$$\begin{aligned} F &= -E(\epsilon d)R = -E\epsilon R d \\ \Sigma \text{Proy } F \text{ en } OX &= -E\epsilon_0 \Sigma R d \cos \alpha' = H_{ox} \\ \Sigma \text{Proy } F \text{ en } OY &= -E\epsilon_0 \Sigma R d \sin \alpha' = H_{oy} \end{aligned}$$

$$\text{Ecuación 23)} \quad \text{tg} \gamma = \frac{\Sigma R d \sin \alpha'}{\Sigma R d \cos \alpha'}$$

Por «a» se traza la paralela a qp que hace un ángulo γ con Ox

$$\text{Ecuación 24)} \quad x_m = u + \frac{v}{\text{tg} \gamma}$$

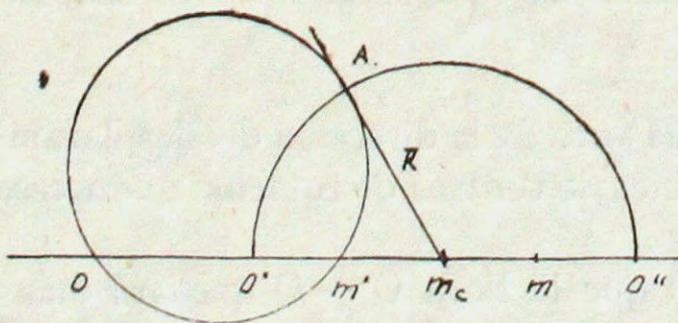


Conocemos así los puntos correspondientes Om y el simétrico m' de la involución armónica $(Om'O'O'') = -1$. Obtenemos el punto central de la involución m_c , uniendo «a» con el centro «C» de los pesos elásticos.

31. Toda secante trazada por un punto es dividida armónicamente por el punto, el círculo y la polar del punto.

Sean O y m dos puntos recíprocos de la división armónica de centro m_c ; m y m_c son datos; se trata de encontrar los puntos O' y O'' bases de la involución.

Como \overline{Om} es mayor que $\overline{Om_c}$ (N.º 24) los puntos O' y O'' son imaginarios, como veremos a continuación.



Reemplazamos el punto m por el simétrico m' respecto al centro m_c de la involución (N.º 20). Se traza un círculo cualquiera que pasa por los puntos O y m' . Desde m_c se traza la tangente $m_c A$ al círculo $Om'A$; con radio $m_c A$ se marcan los puntos O' y O'' , que son los buscados.

Por definición, m' es el punto en que la polar de O corta el diámetro de la curva $O'AO''$.

De la ecuación 9 del N.º 19, tenemos:

$$\frac{OO'}{OO''} = - \frac{m'O'}{m'O''}$$

$$\overline{OO'} = \overline{Om_c} - R \qquad - \overline{m'O'} = R - \overline{m'm_c}$$

$$\overline{OO''} = \overline{Om_c} + R \qquad \overline{m'O''} = \overline{m'm_c} + R$$

$$\frac{\overline{Om_c} - R}{\overline{Om_c} + R} = \frac{R - \overline{m'm_c}}{\overline{m'm_c} + R} \qquad \frac{2\overline{Om_c}}{2R} = \frac{2R}{2\overline{m'm_c}}$$

Ecuación 25) $R^2 = \overline{AC^2} = \overline{Om_c} \cdot \overline{m'm_c} = \overline{m_cO} \cdot \overline{m_c m'}$

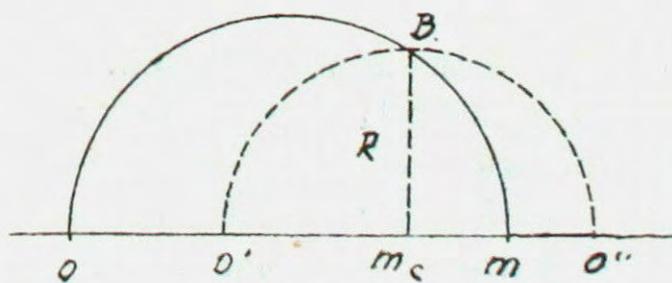
Si referimos esta relación al punto m de la involución, debemos reemplazar $m'm_c$ por $-\overline{mm_c}$; entonces

$$R^2 = - \overline{Om_c} \cdot \overline{mm_c}$$

R es imaginario para la involución de los puntos O, m, O', O'' cuando el punto conjugado m de O se encuentra más lejano que el centro m_c de la involución (Nos. 24 y 20). En consecuencia, el círculo correspondiente es también imaginario y, si recordamos que estas relaciones son de naturaleza proyectiva, estas consideraciones son válidas para toda cónica que pueda ser considerada como proyección de una circunferencia.

32. El teorema que especifica que la altura del rectángulo es media proporcional geométrica entre los segmentos de la hipotenusa, proporciona una construcción muy fácil y que no requiere recurrir al punto simétrico m' de m . Se traza un semicírculo de base \overline{Om} y se levanta en m_c la normal a Om . El punto B es el vértice recto de todos los rectángulos cuyas hipotenusas coinciden con la línea de los centros de giro y cuyos vértices cumplen con la relación:

$$d'/d'' = - r''/r'$$



33. Si se desea trabajar analíticamente para determinar los puntos de O' y O'' conocidos O, m_c y m se toma O como punto de referencia y se designan con esas letras sus abscisas respectivas, considerando que $d' + d'' = 2m_c$ por ser m_c el punto central de la relación $d'/d'' = - r''/r'$ se obtiene fácilmente una ecuación de segundo grado:

$$d^2 - 2m_c \cdot d + m_c (2m_c - m) = 0$$

cuyas dos raíces dan los valores de d' y d''

$$\text{Ecuación 26)} \quad d = m_c \pm \sqrt{m_c (m - m_c)}$$

Si en vez del punto m se trabajara con el simétrico m' al cual corresponde la involución armónica $d'/d'' = -r'/r''$ habríamos llegado a

$$d^2 - 2m_c d + m'm_c = 0$$

$$\text{Ecuación 27)} \quad d = m_c \pm \sqrt{m_c (m_c - m)}$$

que nuevamente demostraría que los puntos O' y O'' son reales cuando $m_c > m$. En tal caso la involución es llamada hiperbólica y se construye geoméricamente como indicamos en el N.º 31.

34. Hemos individualizado totalmente el triángulo auto-polar $O'a O''e$ indicado un procedimiento geométrico sencillo para determinar el centro de giro que corresponde a cada posición de la fuerza H o viceversa. Con ello conocemos el comportamiento elástico de la estructura que corresponde a cada dirección del temblor.

35. La ecuación 10 del N.º 24 nos indica que la fuerza que produce la rotación del tablero en una columna o muro representado por R es $F = -E\epsilon_0 R d_{O-R}$ en que O es el centro instantáneo de rotación que corresponde, como sabemos, a una posición específica de la fuerza sísmica H . El ángulo de giro $E\epsilon_0$ según la ecuación N.º 15 del N.º 25 es $E\epsilon_0 = Hh_0/\Sigma R d_0^2 = Hh_c/\Sigma R d_c^2$

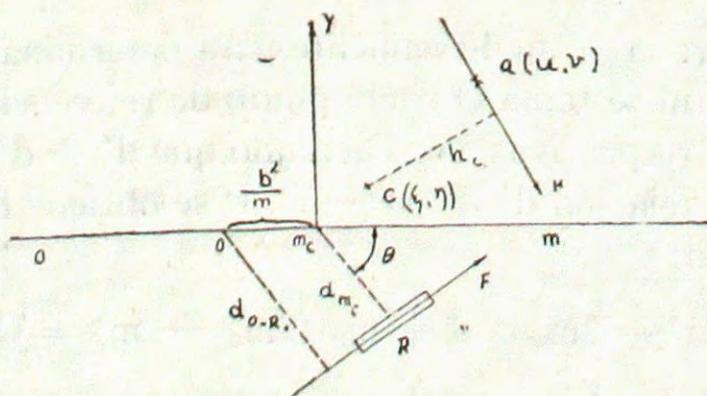
Entonces:

$$\text{Ecuación 28)} \quad F = - \frac{Hh_c}{\Sigma R d_c^2} \cdot R d_{O-R} = - \frac{HR}{\Sigma R d_c^2} H_c d_{O-R}$$

En esta ecuación sólo son variables h_c y d_{O-R} que son las distancias de la fuerza sísmica h_c al centro C del sistema elástico y d_{O-R} que es la distancia de centro instantáneo de rotación O , que a su vez depende de la posición de la fuerza H , (N.º 19), a la línea de acción de R .

36. La fuerza máxima que puede presentarse para el elemento R es la que corresponde a la posición de la fuerza H que hace máximo el producto $h_c d_{O-R}$ de la ecuación 28 del párrafo anterior.

Tomemos, como ejes coordenados, la línea de los centros instantáneos de giro y la normal a ella en el centro de la involución m_c



La ecuación de la recta a — m es

$$y = \frac{v}{u-m} (x - m)$$

y la ecuación normal de ella es

$$\frac{1}{\sqrt{v^2 + (m-u)^2}} \left[vx + (m-u)y - vm \right] = 0$$

La distancia del centro C (ξ, η) a la fuerza H

$$h_c = \frac{v\xi + (m-u)\eta - vm}{\sqrt{v^2 + (m-u)^2}}$$

La ecuación de la línea de acción del elemento R es

$$x \cos \theta + y \sin \theta - d_{mc} = 0$$

y la distancia del centro instantáneo de giro O cuyas coordenadas son $-\frac{b^2}{m}O$

siendo b^2 la potencia de la involución $(O, m, O', O'') = -1$ (ecuación N.º 25 del N.º 31) y m es la coordenada en que H corta la línea de centros de giros O O,

$$d_{O-R} = -\frac{b^2}{m} \cos \theta - d_{mc}$$

$$-h_c d_{O-R} = \frac{\frac{b^2 \cos \theta}{m} (v\xi - u\eta) + (\eta - v) b^2 \cos \theta + d_{mc} (v\xi - u\eta)}{\sqrt{v^2 + (m-u)^2}}$$

haciendo máxima esta función de la abscisa variable m y agrupando términos conocidos

$$\begin{aligned} D &= b^2 (v\xi - u\eta) \cos \theta \\ E &= b^2 (\eta - v) \cos \theta + (v\xi - u\eta) d_{mc} \\ G &= (\eta - v) d_{mc} \end{aligned}$$

tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\sqrt{v^2 + (m-u)^2} \left[G - \frac{D}{m^2} \right] - \left[\frac{D}{m} + E + Gm \right] \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(m-u)}{v^2 + (m-u)^2}}}{v^2 + (m-u)^2} = 0$$

que conduce a la cúbica completa, es decir, con término en m^2 y m

$$\text{Ecuación 29) } (E + Gu)m^3 - [Eu - 2D + (v^2 + u^2) G] m^2 - 2Dum + (v^2 + u^2) D = 0$$

Esta ecuación es de solución engorrosa y, por tanto, es menos laborioso proceder por tanteos en busca de la posición de H , es decir, de m , que hacen máximo el valor $h_c \quad d_{o-R}$

La distancia h_c representa a escala $1 / \frac{Rd_c^2}{H}$ el valor de giro $E\epsilon_c$ que produce una posición específica de la fuerza sísmica H y, en consecuencia, la medida directa de ella sobre el dibujo permite trazar con extrema facilidad la curva de giros, para cada posición de la fuerza (ver lám. 1).

37. Aunque en el curso de esta exposición hemos evitado en lo posible referirnos a los triángulos autopolares de las cónicas, para ajustarnos al lenguaje matemático no nos ha quedado otro recurso que dejar constancia de las propiedades polares de los puntos involutivos considerados. En todo ello hemos supuesto que el lector está familiarizado con estos aspectos de la Geometría Moderna.

Hemos visto a través de los Nos. 19, 23, 31 y 34 que cada vértice del triángulo autopolar $O'aO''$ es el polo del lado opuesto que a su vez es la polar de ese vértice. Hemos esclarecido en el N.º 31 que es imaginaria la cónica fundamental cuyo centro coincide con el centro elástico C y a la cual pertenece el triángulo autopolar formado por tres pares de centros instantáneos de giros y fuerzas correspondientes. A la vez hemos indicado que el empleo de los puntos simétricos respecto al punto central m_c de las involuciones armónicas permite obtener una cónica real en que la polaridad de los vértices del triángulo respecto a sus lados opuestos guardan entre sí la relación de polos y antipolares, o bien de polares y antipolos.

38. Sabemos que una cónica

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Ex + 2Fy + G = 0$$

queda definida por cinco condiciones que corresponden a parámetro $\frac{A}{G}, \frac{B}{G}$

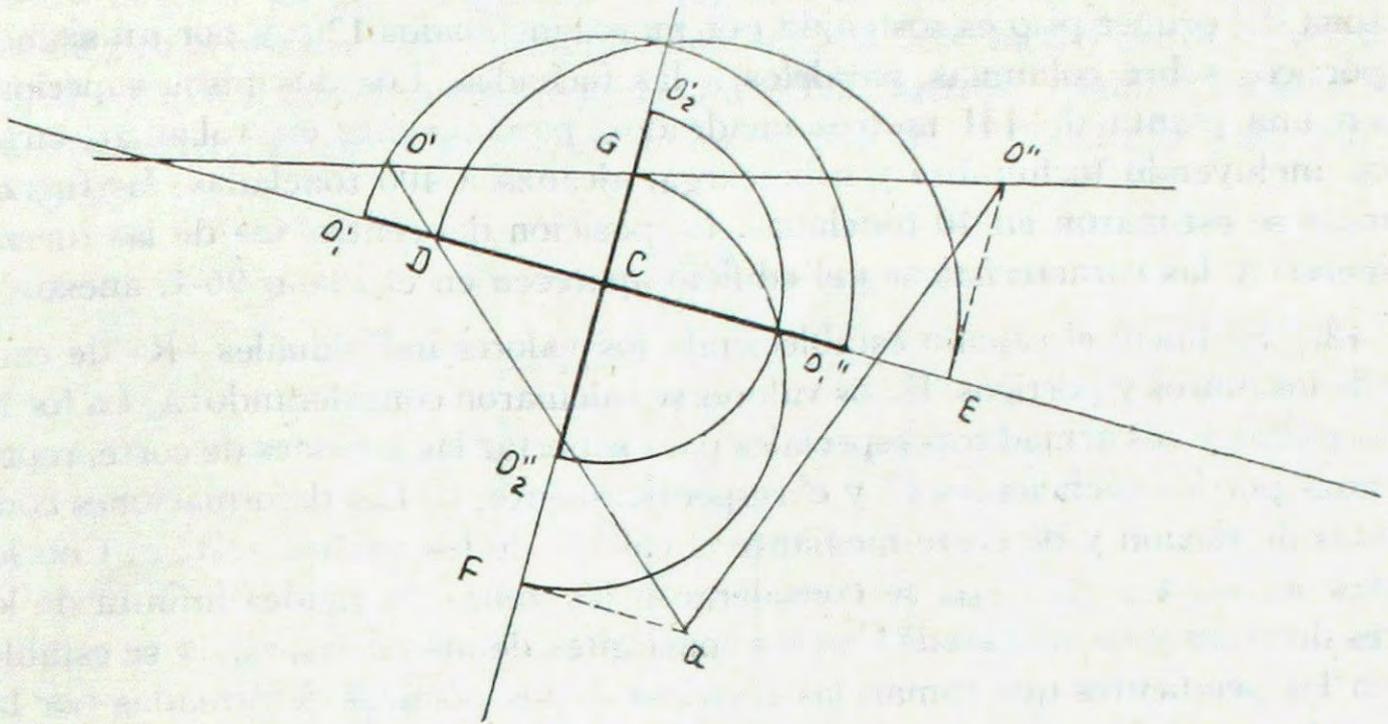
Un triángulo autopolar proporciona tres condiciones y conocer la posición del centro de la cónica equivale a conocer un polo y su polar —la recta al infinito— es decir, proporciona las dos condiciones que faltan.

Partiendo del triángulo autopolar y del punto central de la cónica, esto puede obtenerse por medios analíticos o geométricos conocidos. En lo que sigue usaremos por su sencillez el método geométrico.

Necesitamos dibujar la elipse de elasticidad sólo en los casos en que obren otras fuerzas sísmicas exteriores al edificio, o bien, cuando haya que considerar estructuras o grupos de estructuras unidas superiormente por amarras o tableros. Para tales casos, los centros instantáneos de giros debidos a estas acciones externas son los antipolos respecto a las líneas de acción de las fuerzas de ligazón de ambas estructuras, respecto a sus respectivas elipses de elasticidad. Estos casos especiales pueden resolverse con facilidad aplicando los mismos procedimientos usados para el cálculo de puentes de arcos múltiples sobre cepas altas y elásticas.

39. Sean DE y FG las posiciones de los dos ejes principales de la Elipse de Elasticidad (N.º 29). Considerando el eje DE observamos que las antipolares de cada uno de sus puntos es paralela al eje conjugado GF de DE . Recordando

que D es un punto de la recta $O'a$ antipolar de O'' y que el polo O'' es el centro del haz de rectas en que cada una es antipolar de un punto de $O'a$.



La antipolar de D debe ser paralela a GF y pasar por O'' . Esta antipolar $O''E$ corta el eje principal DE en un punto E que con D forma un par de puntos conjugados y cuyo centro involutivo es C .

Encontrar los puntos O'_1 y O''_1 bases de la involución armónica sobre la línea DE es un problema ya familiar —ver N.º 33—. Por definición los puntos O'_1 y O''_1 son las intersecciones de la cónica con la secante DE cuando esta secante coincide con uno de los ejes principales O'_1C y CO''_1 semi-ejes de ella.

40. El sistema de cálculo que hemos desarrollado permite resolver las sollicitaciones máximas de cada pórtico que pueda producir resonancia entre el edificio y el período propio del terreno de fundación. Al efecto, un temblor de característica ondulatoria sinusoidal, caso frecuente en territorios planos formados por capas sedimentarias uniformes y gruesas, provocará un movimiento forzado sobre el edificio que si se mantiene por un tiempo apreciable —medio minuto o más— provocará sollicitaciones muy superiores a la que corresponde a la de aceleración sísmica.

Conocemos el centro de rotación que corresponde a cada dirección del temblor y como la posición de ese centro sólo depende de su dirección, el carácter de reversión ondulatoria de las fuerzas sísmicas en nada altera la posición del centro de rotación.

Los movimientos de la estructura corresponden a una vibración forzada actuando sobre un cuerpo elástico de un grado de libertad, enteramente similar a los sismógrafos de masas pendulares. Son conocidos el movimiento ondulatorio solicitante en dirección, amplitud y período, el centro de rotación, la masa oscilante y la constante torsional de la estructura que corresponde a ese centro de giro. También se puede incluir el factor de amortiguamiento de acuerdo con el material del edificio.

Las soluciones matemáticas de los problemas que resultan de un sólido que oscila con un grado de libertad han sido establecidas en todos los aspectos y figuran en los textos sobre vibraciones y en algunos de sismología en el capítulo de instrumentos. A ellos remito al lector.

41. Se ha aplicado la teoría de centros de giros desarrollada en los números anteriores, al cálculo antisísmico de un edificio de tres pisos que forma parte de una Estación de Servicio para Camiones cuyas fachadas hacen ángulos de 60 y 120°. La zona del primer piso es sostenida por muros inclinados 120° y por un sistema de pórticos sobre columnas, paralelos a las fachadas. Los dos pisos superiores tienen una planta de 131 metros cuadrados, parcialmente en voladizo, cuyos pesos, incluyendo techumbre y sobrecarga, alcanza a 400 toneladas; las fuerzas sísmicas se estimaron en 40 toneladas. La posición del centro «a» de las fuerzas de inercia y las características del edificio aparecen en el Plano 96-1, anexo.

42. Se inició el cálculo estableciendo los valores individuales «R» de cada uno de los muros y pórticos. Estos valores se calcularon considerando: a) La forma de las piezas y sus armaduras especiales para soportar las acciones de corte, representadas por los coeficientes e'' y e' respectivamente; b) Las deformaciones combinadas de flexión y de corte mediante el cálculo de los valores « ξ_0 »; c) Con los valores α_a , α_b , β_{aa} , β_{ab} , β_{bb} , se consideraron las zonas de rigidez infinita de los cruces de vigas y columnas; d) Con las constantes de nudos « r_a , r_b , ...» se establecieron las pendientes que toman las elásticas de los pórticos deformadas por las fuerzas horizontales; e) Con éstos se calcularon los valores de las fuerzas que corresponden a una pendiente unitaria, y f) De allí se obtuvieron los valores «R».

Para los muros se usaron fórmulas deducidas de la teoría de los grados de empotramiento que permiten obtener más fácilmente los valores de «R» considerando los efectos del corte y de los nudos y también las deformaciones del terreno de fundación que, para estos casos, tienen un valor relativo preponderante.

En la página 27 aparecen los diagramas que resumen los resultados de estos cálculos preliminares. Todas las operaciones numéricas se hicieron con regla de cálculo.

43. A continuación se obtuvieron las coordenadas ξ y η del centro elástico «c» aplicando la ecuación 18 del N.º 26; enseguida se verificó la exactitud del cálculo haciendo girar la estructura alrededor de «c» al aplicar un torque de un metro-tonelada. Se registraron errores de 3 y 5 kgs. en las proyecciones de las fuerzas sobre dos ejes ortogonales.

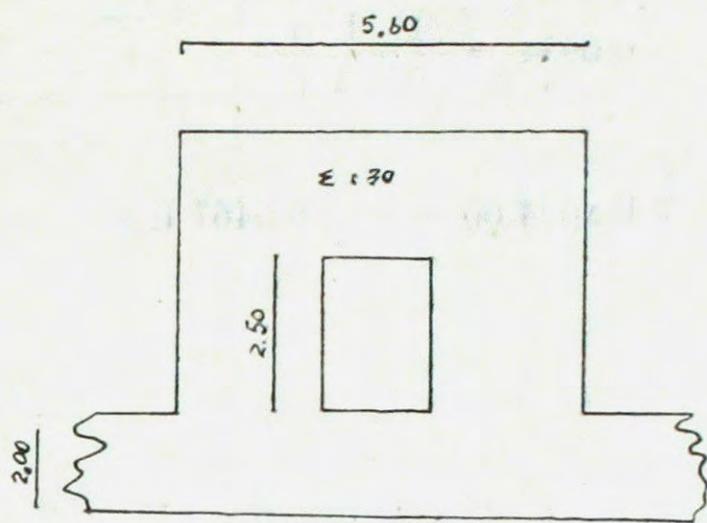
Aplicando al centro elástico «c» la fuerza H_c desde el punto «a» se produjo la traslación paralela del tablero superior. Se obtuvo una desviación angular del movimiento Δ respecto a la fuerza H_c de 47° 44' aplicando la ecuación 21 del N.º 27 y a continuación se verificó que las fuerzas individuales causadas por esa traslación paralela producían una resultante opuesta y coincidente con la fuerza H_c . La componente normal a esa fuerza, que debió ser nula, resultó con un error de sólo 2.9 por mil. El desplazamiento real de la estructura fué de 0,664 milímetros.

En la página 31 se obtuvo la distancia del lugar geométrico de los centros instantáneos de giros al centro «a» de acciones sísmicas, aplicando la ecuación 13 bis del N.º 25. Se verificó el cálculo mediante la componente normal a la recta OO que resultó nula hasta la cuarta cifra decimal. Con la ecuación 16 del N.º 25 se verificó la exactitud de las fórmulas que relacionan el momento de inercia polar de «a» con el de «c»; el error fué de 0,785%. También se verificaron los giros de los puntos m_c y c resultando iguales dentro de un error de 0,05%.

Se determinaron las direcciones de los ejes principales de la Elipse de Elas-

tividad del sistema que resultaron exactamente coincidentes con los obtenidos por medios geométricos.

Para obtener un par de puntos conjugados se tomó sobre la recta OO un centro de giro arbitrario «o» ubicado a 15.09 m. a la derecha del centro involutivo m_c , se obtuvo el correspondiente m de O á -2.72 metros. Geométrica y analíticamente se determinaron las abcisas de los puntos O' y O'' del triángulo autopolar O'aO''.



$$e' = 1 \quad e'' = 1$$

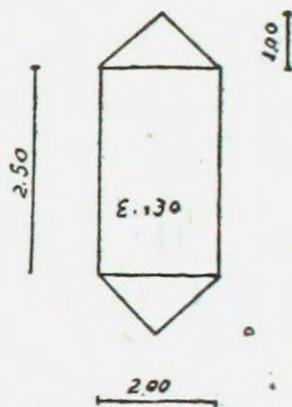
$$L = 2,5 \quad L/h = 1.25$$

$$h = 2.0 \quad (L/h)^2 = 1.56$$

$$\xi_0 = \frac{4.5}{4.56} = \sim 1.0$$

$$\alpha_a = \alpha_b = 0.5 \frac{2.0}{2.5} = 0.4$$

$$\beta_{AA} = 0.4 \left(1 + \frac{2.0}{2.5} \right) + 0.5 \frac{2.0}{2.5} = 1.12$$



$$I = 0.200 \text{ m}^4$$

$$K = 0.200/2.50 = 0.080 \text{ m}^3$$

$$A = 0.30 \times 2.00 = 0.60 \text{ m}^2$$

$$e' = 1 \quad e'' = 1 \quad L = 1.60 \quad h = 2.00$$

$$L/h = 1.6/2.00 = 0.8 \quad (L/h)^2 = 0.64$$

$$\xi_0 = \frac{4.5}{3 + 0.64} = 1.23$$

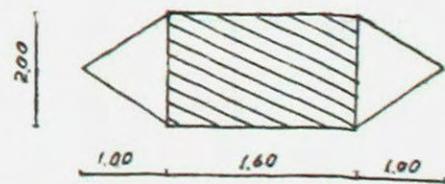
$$\alpha_a = \alpha_b = \left(1 - 1.23 \right) \left(1 + \frac{2.0}{1.6} \right) + 0.5 \frac{2.0}{1.6} = 0.108$$

$$\beta_{AA} = \beta_{BB} = \beta_{AB} = 0.108 \times 2.25 + 0.625 = 0.868$$

$$I = \frac{0.30 \cdot 2.0^3}{12} = 0.200$$

$$K = 0.200/1.60 = 0.125$$

$$\gamma_A = \frac{0.080 (1+1.12+1.12) - 0.125 \times 0.868 \gamma_A - 0.080 \times 1.120 \gamma_A}{0.080 (1 + 1.12) + 0.125 \cdot (1 + 0.868)}$$



$$0.598 \gamma_A = 0.259 \quad \gamma_A = 0.434$$

$$\text{Col: } n_0 = 3 + 1.56 = 4.56$$

$$\frac{H_1}{i p} = \frac{0.60}{A \times 2.5 \times 4.56} [(2.50 + 2.00) 0.434 + (2.5 + 2.00) 0.434 - 2 \times 5.50] =$$

$$= -0.0934$$

$$\frac{H_1}{\frac{2E \Delta p}{L p}} = -0.0934 = \frac{H_1 L p}{2E \Delta p}$$

$$H_1 = -0.0934 \times 2 E \Delta p / 4.00 = -0.0467 E \Delta p$$

$$R = 0.0467$$

$$2 R = -0.0934$$

$$e' = e'' = 1 \quad f' = f'' = 1.00 \text{ (emp)}$$

$$L = 3.50$$

$$h = 0.60$$

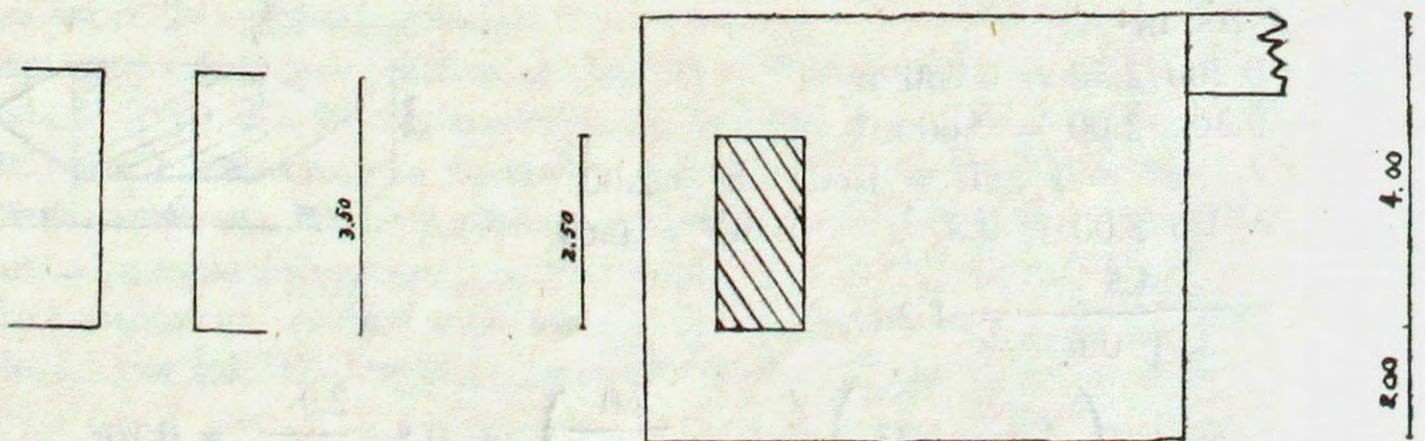
$$\frac{L}{h} = 5.83$$

$$\frac{H}{E \Delta} = \frac{0.36}{(3+34) 3.5} = \frac{0.0098}{3.5}$$

$$\left(\frac{L}{h}\right)^2 = 34$$

$$R = \frac{0.0098}{3.50} = 0.0028$$

$$A = 0.60^2 = 0.36 \text{ m}^2$$



Condiciones: articulado arriba $f' = 0$
 semi emp. abajo $f'' = 0.5$

$$R = \frac{A}{L} \frac{1}{3 + \frac{e'}{e''} \frac{Dc}{Bc} \left(\frac{L}{h}\right)^2}$$

$$e' = e'' = 1$$

$$A = 0.30 \times 4.70 = 1.41 \text{ m}^2$$

$$L = 6.50 \begin{cases} L/h = 1.38 \\ (L/h)^2 = 1.91 \end{cases}$$

$$\frac{D_c}{B_c} = \frac{3 + f' + f'' - f'f''}{f' + f'' + 2f'f''} \quad \frac{D_c}{B_c} = \frac{3.5}{0.5} = 7$$

$$R = \frac{1.41}{6.50} \frac{1}{3 + 1 \times 7 \times 1.91} = 0.0133$$

Colum. $f' = f'' = 1$ $e' = e'' = 1$

$$\frac{L}{h} = \frac{2.50}{0.70} = 3.57 \quad \left(\frac{L}{h}\right)^2 = 12.70$$

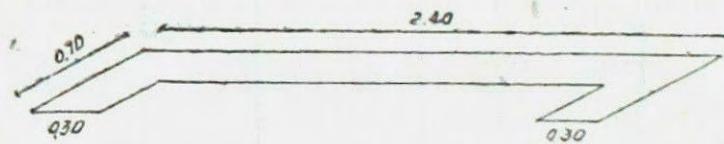
$$A = 0.30 \times 0.70 = 0.21 \text{ m}^2$$

$$R = \frac{0.21}{2.50} \frac{1}{3 + 12.70} = 0.00536$$

R del Conjunto: $0.0133 + 0.0054 = 0.0187$

$L = 4.50$ $e' = 1$ $e'' = 2$

$$I = \frac{0.30 \times 2.40^3}{12} + 2 \times 0.40 \times 0.30 \times 1.20^2 = 0.691 \text{ m}^4$$

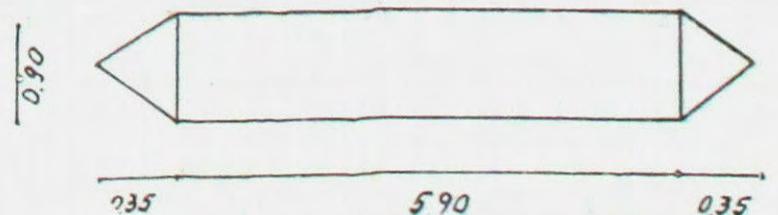
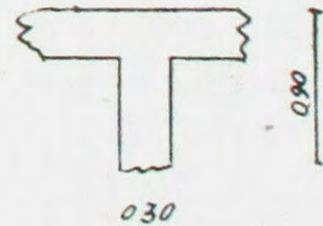
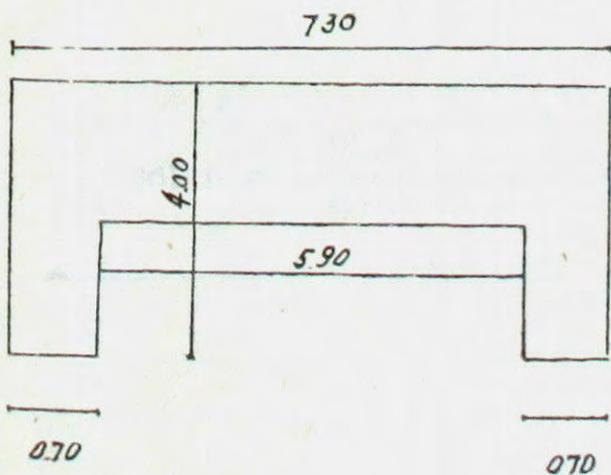


$f' = 0.00$
 $f'' = 0.50$

$$\frac{D_c}{B_c} = \frac{3 + 0.00 + 0.50 - 0.00}{0.00 + 0.50 + 2 \times 0.00} = \frac{3.50}{0.50} = 7$$

$$A_c = 0.30 \times 2.40 = 0.72 \text{ m}^2$$

$$R_c \frac{0.72}{4.50} = \frac{1}{3 + \frac{1}{2} \times 7 \times \left(\frac{4.50}{2.40}\right)^2} = 0.0102$$



$$L = 5.90 \quad L/h = 6.56 \quad e' = 1.00$$

$$h = 0.90 \quad (L/h)^2 = 43.0 \quad e'' = 1.85$$

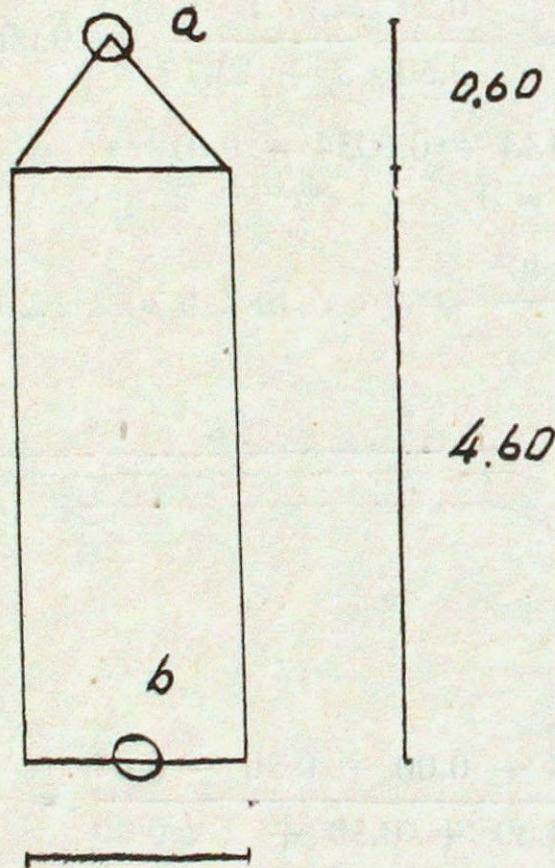
$$\xi_o = \frac{4.5}{3 + \frac{1}{1.85} \times 43.0} = \frac{4.5}{26.3}$$

$$\xi_o = 0.171$$

$$\alpha_a = \alpha_b = (1 - 0.171) \left(1 + \frac{0.70}{5.90} \right) + \frac{1}{2} \frac{0.70}{5.90} = 0.986$$

$$\beta_{aa} = \beta_{bb} = \beta_{ab} = 0.986 \times 1.119 + 0.059 = 1.162$$

$$I = 1.85 \frac{0.30 \times 0.90^3}{12} = 0.0337$$



$$K = \frac{0.0337}{5.90} = 0.00571$$

$$L = 4.60 \quad L/h = 6.57$$

$$h = 0.70 \quad (L/h)^2 = 43.2$$

$$e' = 1.00 \quad e'' = 1.00$$

$$\xi_o = 4.5 / (3 + 43.2) = 0.0974 \sim 0.097$$

$$\alpha_a = (1 - 0.097) \left(1 + \frac{1.20}{4.60} \right) + \frac{1}{2} \frac{1.20}{4.60} = 1.269$$

$$\beta_{aa} = 1.269 \times 1.261 + 0.131 = 1.733$$

$$\beta_{ab} = 1.269$$

$$A = 0.70 \times 0.30 = 0.210$$

$$I = \frac{0.30 \times 0.70^3}{12} = 0.00858$$

$$K = \frac{0.00858}{4.60} = 0.00186$$

$$\eta_0 = 46.2 \quad \gamma_b = 1.48$$

$$\gamma_a = \frac{0.00186 (1 + 1.733 + 1.269) - 0.00186 \times 1.269 \times 1.48 - 0.00571}{0.00186 (1 + 1.733) + 0.00571} \times \frac{1.162 \times \gamma_a}{(1 + 1.162)}$$

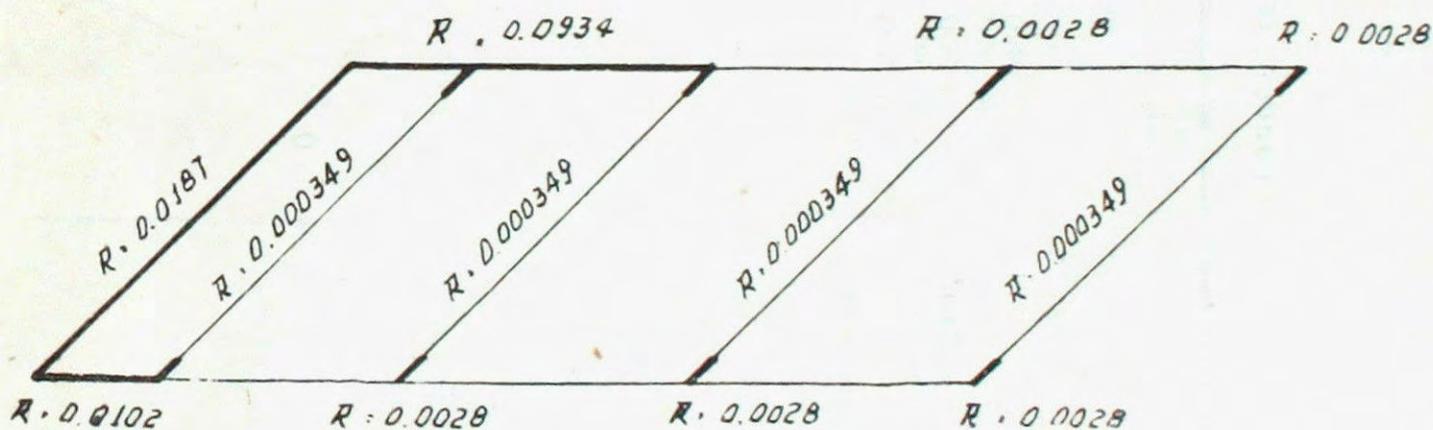
$$\gamma_a = 0.164$$

$$H = \frac{0.210}{4 \times 4.60 \times 46.2} \left[(4.60 + 1.20) 0.164 + 4.60 \times 1.48 - 2 \times 5.20 \right] = - 0.000653$$

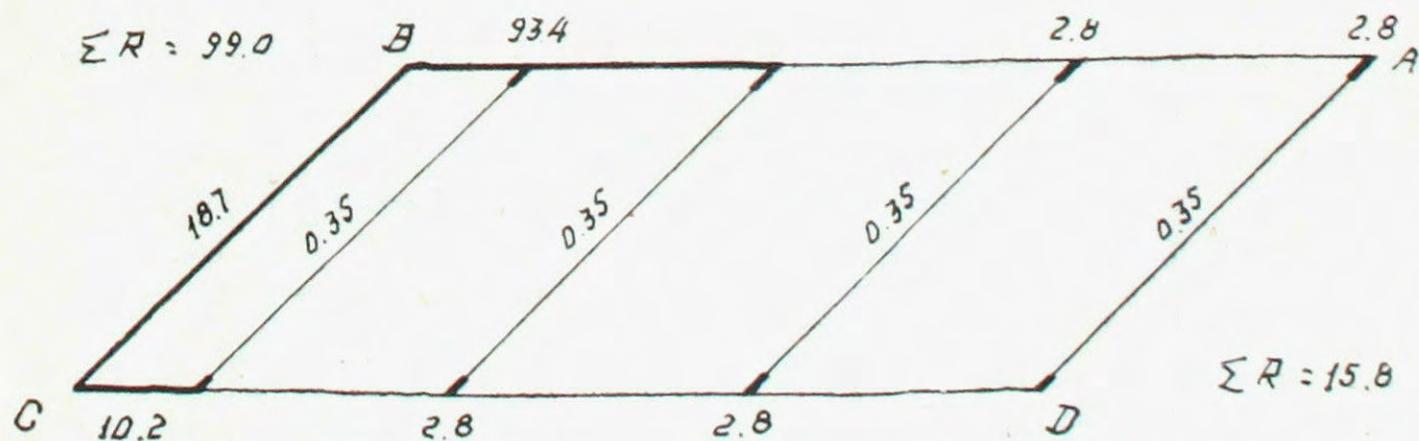
$$H = 0.000653 \times 2 \frac{E p}{4.60} \quad 2H_1 = 0.000568 E \Delta P = RE \Delta p$$

Se calculó con $R = 0.00035$ porque la columna se dejó de 0.60 m. en vez de 0.70 m.

Por comodidad para los cálculos se ampliaron 1.000 veces los R



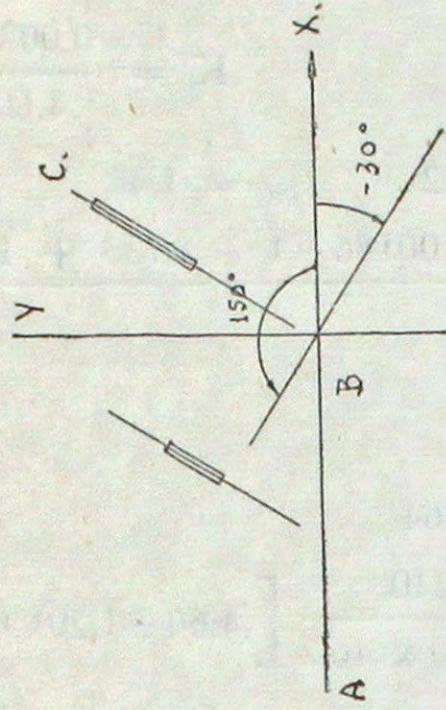
Valores reales



Valores ampliados.

Ecuación 18, N.º 26

Rcos ²	R	d	Φ	sen Φ	cos Φ	Rdsen Φ	Rdcos Φ	Rsen Φ cos Φ	Rsen ² Φ
0.000	99.0	0.00	90°	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	99.0
0.000	15.8	6.00	90°	1.000	0.000	94.800	0.000	0.000	15.8
14.000	18.7	0.00	30°	- 0.500	0.866	0.000	0.000	- 8.0900	4.673
0.262	0.35	1.73	+ 150°	+ 0.500	- 0.866	0.303	- 0.524	- 0.1514	0.0875
0.262	0.35	5.30	+ 150°	+ 0.500	- 0.866	0.928	- 1.605	- 0.1514	0.0875
0.262	0.35	8.90	+ 150°	+ 0.500	- 0.866	1.557	- 2.698	- 0.1514	0.0875
0.262	0.35	12.50	+ 150°	+ 0.500	- 0.866	2.187	- 3.784	- 0.1514	0.0875
15.048						99.775	- 8.611	8.6956	119.8230



$$\xi = \frac{(-8.611) 119.82 - 99.775 (-8.6956)}{119.82 \times 15.048 - 8.696^2} = \frac{-164}{1727.7} = -0.0951$$

$$\eta = \frac{99.775 \times 15.048 - (-8.611) \times (-8.6956)}{1727.7} = \frac{1427.1}{1727.7} = -0.825$$

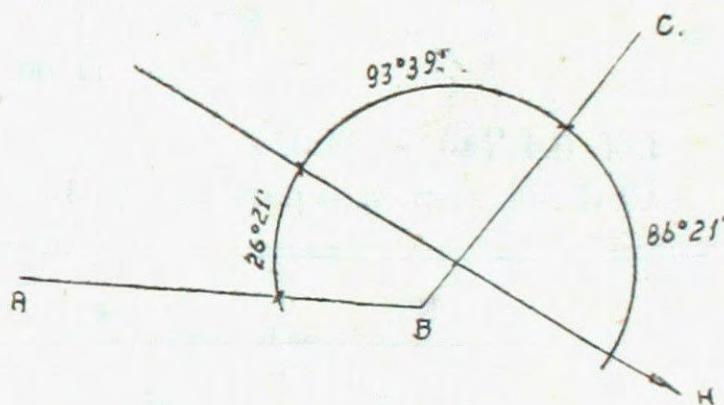
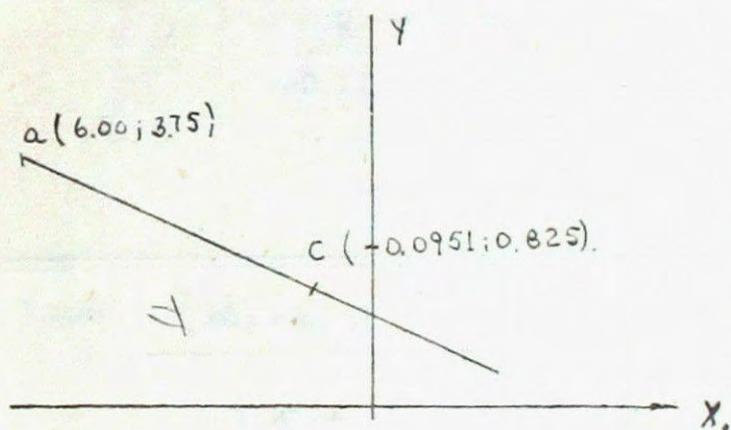
Ecuación 19, N.º 26

R	d	R d ²	α	sen α	cos α	Rdsen α	Rdcos α
99.0	0.825	67.3	0° 0'	0.000	1.000	0.000	+ 81.65
15.8	5.175	423.6	0° 0'	0.000	1.000	0.000	- 81.70
8.7	0.33	2.0	120° 0'	0.866	- 0.500	+ 5.34	+ 3.08
0.35	1.40	0.7	120° 0'	0.866	- 0.500	- 0.42	- 0.24
0.35	5.00	8.7	120° 0'	0.866	- 0.500	- 1.51	- 0.87
0.35	8.60	30.1	120° 0'	0.866	- 0.500	- 2.61	- 1.50
0.35	12.20	52.2	120° 0'	0.866	- 0.500	- 3.70	- 2.13
		584.6				- 2.90	- 1.71

Para M = 1 mton

$$E_{\epsilon c} = \frac{1}{584.6} = 0.00171.$$

Los errores resultan: 2.90 x 0.00171 = 0.00496 5 kg/mton
 1.71 x 0.00171 = 0.00293 3 kg/mton



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3.750 - 0.825}{-6.000 + 0.0951} = - \frac{2.925}{5.905} = - 0.4953$$

$\alpha = 26^\circ 21'$	$86^\circ 21'$
$\operatorname{sen} \alpha = 0.444$	$\operatorname{sen} \alpha = 0.998$
$\operatorname{cos} \alpha = 0.896$	$\operatorname{cos} \alpha = 0.064$
$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha = 0.398$	$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha = 0.064$
$\operatorname{sen}^2 \alpha = 0.197$	$\operatorname{sen}^2 \alpha = 0.996$

Ecuación 21, N.º 27

sen ² α	R	sen α cos α	Rsen α cos α	Rsen ² α
0.197	114.8	0.398	45.69	22.63
0.996	20.1	0.064	1.29	20.02
			46.98	42.65

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{46.98}{42.65} = 1.100 \quad \lambda = 47^\circ 44'$$

Ecuación 20, N.º 27

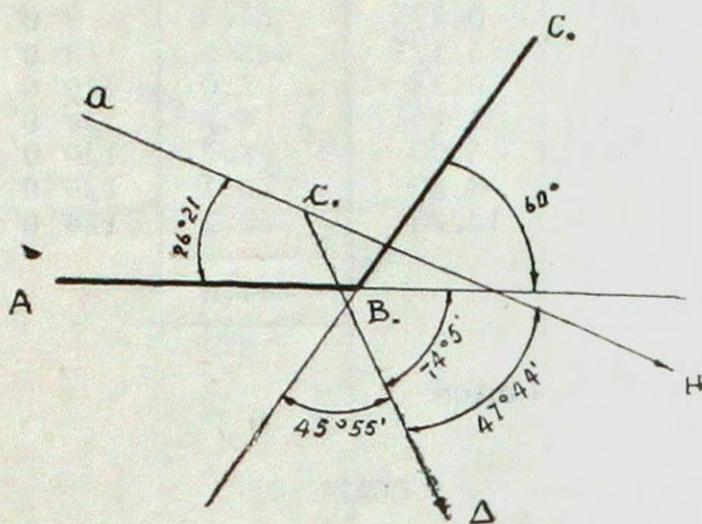
Angulos β (Δ con R_s)

$$\begin{array}{r} \text{Ejes AB y CD: } 26^\circ 21' \\ \quad \quad \quad 47^\circ 44' \\ \hline \quad \quad \quad 74^\circ 50' \end{array}$$

$$\cos \beta = 0.2743$$

$$\begin{array}{r} \text{Ejes BC: } \quad 119^\circ 60' \\ \quad \quad \quad -74^\circ 05' \\ \hline \quad \quad \quad 45^\circ 55' \end{array}$$

$$\cos \beta = 0.6957$$



$$\begin{array}{r} \text{Eje AB y CD: } \Sigma R = 114.8 \\ \quad \quad \quad \text{sen } \alpha = 0.444 \\ \quad \quad \quad \text{cos } \beta = 0.2743 \\ \hline \quad \quad \quad 14.00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Eje BC: } \Sigma R = 20.1 \\ \quad \quad \quad \text{sen } \alpha = 0.998 \\ \quad \quad \quad \text{cos } \beta = 0.696 \\ \hline \quad \quad \quad 13.961 \end{array}$$

$$\text{Dif. } 0.4/140 = 0.0029$$

El desplazamiento para $H_c = 40$ ton.

R	cos α	cos β	$R \cos \alpha \cos \beta$
114.8	0.896	0.2748	-28.3
20.1	0.064	0.7953	+ 0.89
			- 27.4

40ton

$$\Delta = \frac{\frac{40 \text{ ton}}{2.2 \times 10^6} - 0.0274}{2.2 \times 10^6} = - 664 \times 10^{-6} = 0.664 \text{ m/m.}$$

Ecuación 13 bis, N.º 25

< OO — BA

$$\begin{array}{r} 26^\circ 21' \\ 180 \\ 47^\circ 44' \\ 90 \\ \hline - 344^\circ 05' \\ 359^\circ 60' \\ \hline a' = 15^\circ 55' \\ \text{sen } a' = 0.2743 \\ \text{cos } a' = 0.9616 \end{array}$$

< OO — BC

$$\begin{array}{r} 15^\circ 55' \\ 120^\circ 00' \\ \hline 135^\circ 55' \\ 179^\circ 60' \\ \hline 44^\circ 05' \\ \text{sen } a' = 0.6957 \\ \text{cos } a' = 0.7183 \end{array}$$

R	d ₁	Rd ^{2a}	sen α	Rd sen α'	cos α'	Rda cos α'
99.0	3.75	1.392.2	0.274	- 101.7	0.962	- 357
15.8	2.25	80.0	0.274	+ 9.7	0.962	+ 34.2
18.7	7.08	936.0	0.696	+ 92.2	0.718	- 95.1
0.35	5.35	10.0	0.696	+ 1.3	0.718	- 1.3
0.35	1.75	1.1	0.696	+ 0.4	0.718	- 0.4
0.35	1.82	1.2	0.696	- 0.4	0.718	+ 0.5
0.35	5.44	10.2	0.696	- 1.5	0.718	+ 1.4
		2.430,7		0.0		- 417.7

$$h_a = \frac{2.430,7}{417.7} = 5.818 \text{ m} \quad \text{Error comp. normal: 0.000}$$

Rotación en m_c

R	d	Rd ²	sen α	Rd sen α	cos α	Rd cos α
99.0	0.10	1.0	0.274	- 2.7	0.962	- 9.5
15.8	6.10	587.4	0.274	- 26.4	0.962	- 92.7
18.7	1.57	46.1	0.696	+ 20.4	0.718	- 21.1
0.35	3.30	3.8	0.696	+ 0.8	0.718	- 0.8
0.35	6.90	16.6	0.696	+ 1.7	0.718	- 1.7
0.35	10.50	38.5	0.696	+ 2.5	0.718	- 2.6
0.35	14.10	69.3	0.696	+ 3.4	0.718	- 3.5
		762.7		- 0.3		- 131.9

Ecuación 13) $h_a = \frac{762.7}{131.9} = 5.82 \text{ (5.82) Error 0.00}$

Ecuación 16) $\frac{5.82}{4.42} \times 584.6 = 769 \text{ en vez de } 763$
 $6/763 = 0.785 \%$

Giro en m_c

Ecuación 14) $E_{emc} = - \frac{40 \times 5.818}{762.7} = - 0.3051$

Ecuación 15) $\text{Giro en } C E_{\varepsilon c} = - \frac{40 (5.818 - 1.40)}{584.6} = - 0.3065$

dif. 0.0014 0.046 %

Error en ±00 : - 0.3051 x 0.3 = 0.091ton / 40ton. = 2.3 kg/ton.

Ecuación 22, N.º 28

Ejes principales

AB y CD	ΣR = 114.8	BC	ΣR = 20.1	
	α = 26° 21'		α = 86° 21'	+ 179° 60'
	2 α = 52° 42'		2 α = 172° 42'	+ 172° 42'
				<hr/>
				7° 18'

$\text{sen } 2 \alpha = 0.7955$
 $\text{cos } 2 \alpha = 0.6060$

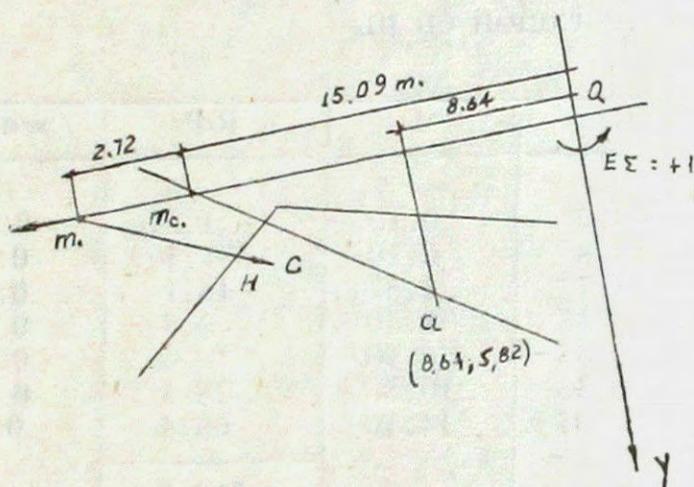
$\text{sen } 2 \alpha = 0.1271$
 $\text{cos } 2 \alpha = -0.9919$

R	Sen 2 α	Rsen 2 α	cos 2 α	Rcos 2 α
114.8	0.796	91.40	0.606	69.6
20.1	0.127	2.6	-0.992	-19.9
		+ 94.0		+ 49.7

$\text{tg } 2 \theta = \frac{94.0}{49.7} = 1.890 \quad 2 \theta = 62^\circ 7' \quad 31^\circ 03' 30''$

$\text{tg } 31^\circ 03' 30'' = 0.6023$

Par conjugado O — m
 AB y CD $\alpha' = 15^\circ 55'$
 $\text{sen } \alpha' = 0.274$
 $\text{cos } \alpha' = 0.962$
 BC $\alpha' = 44^\circ 05'$
 $\text{sen } \alpha' = 0.696$
 $\text{cos } \alpha' = 0.718$



R	d	Rd ²	sen α'	Rdsen α'	cos α'	Rdcos α'
99.0	4.22	1.763	0.274	-114.5	0.962	+401.9
15.8	10.22	1.651	0.274	-44.2	0.962	+155.3
18.7	8.91	1.483	0.696	-116.0	0.718	-119.6
0.35	7.20	18.1	0.696	-1.7	0.718	-1.8
0.35	3.60	4.5	0.696	-0.9	0.718	-0.9
0.35	0.00	0.0	0.696	0.0	0.718	0.0
0.35	3.60	4.5	0.696	+0.9	0.718	+0.9
		4.924,1		-276.4		+435.8

$\text{tg } \gamma = - \frac{276.4}{435.8} = -0.6342 \quad x_m = +8.64 + \frac{5.818}{0.634} = +17.81$

$O_{mc} = 15.09 \quad d = +15.09 \pm \sqrt{15.09(17.81 - 15.09)} = \begin{cases} +8.68 \\ +21.50 \end{cases}$

$m_c = 2.72$
 $O_m = 17.81$

Verificación ecuación 14 y 16, N.º 25

$\Sigma R d_c^2 = 584.6 \quad h_o = 9.54 \text{ m} \quad h_c = 1.10 \text{ m}$

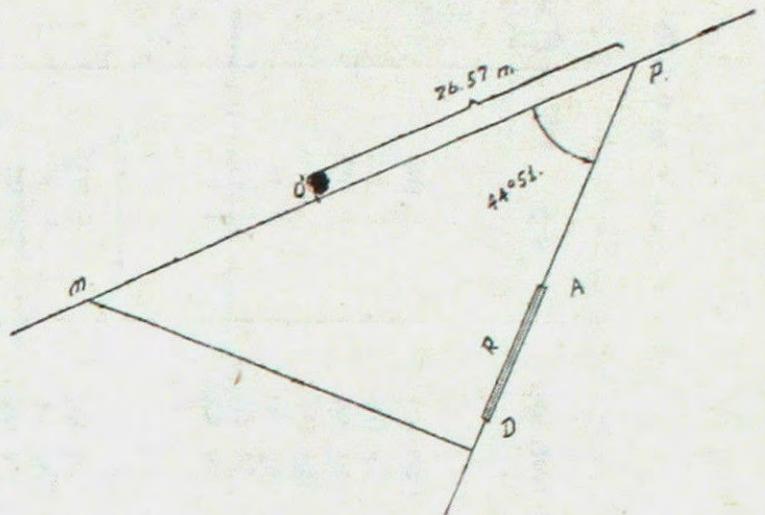
$\Sigma R d_o^2 = \frac{9.54}{1.10} 584.6 = 5070 \text{ m}^4 \text{ en vez de } 4924.1 \quad 0.9\%$

Estudio sollicitación máxima de pórticos AD

$$\frac{d'}{d''} = - \frac{r''}{r'}$$

$$\frac{d'}{d'' - d'} = \frac{r''}{r'' - r'}$$

$$d' = + \frac{(d'' - d')}{12.81} \frac{r''}{r'' - r'}$$



Verificación para H en 10 m

Según datos de página 34.

$$E\varepsilon = 0.443$$

99	1.00	←	43.9 ton	
15.8	5.00	→	35.1	8.8 t x 0.284 = + 2.5
18.7	4.40	↗	36.6	} 42.75 x 0.970 = - 41.5
0.35	6.12		0.95	
0.35	9.72		1.50	
0.35	13.32		2.06	
0.35	16.92		2.63	

— 39.0 en vez de 40 ton

D. Sanchez V.

