

ANAALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

Sucesor

De la:

"SOCIEDAD DE INGENIERIA"

Fundada el 31 de Mayo de 1888

Y del:

"INSTITUTO DE INGENIEROS"

Fundado el 28 de Octubre de 1888

Con Personalidad Jurídica desde el 28 de Diciembre de 1900

Adherido a la USAI y a la CONFERENCIA MUNDIAL DE LA ENERGIA

AÑO LX



JULIO - AGOSTO DE 1947



N.º 7-8

Comisión Editora: Raúl Sáez S. (Pdte.), Carlos Ponce de León y Arturo Quintana.

Ing. Ramón Salas E.

Cálculo directo de intereses y amortizaciones acumulativas

Este memorándum es una respuesta a los financistas y hombres de negocios que preguntan, para calcular intereses y amortizaciones acumulativas, con cualquier porcentaje, por un camino directo que no requiera seguir la serie de capitalizaciones, sin tablas, ni tecnicismos matemáticos.

Se indica un camino muy corto, pero sólo aproximado y otro paralelo, reajustado fácilmente, cuya precisión es adecuada para las cuestiones económicas y estudios de negocios; pero insuficiente si hay que evitar aun las pequeñas diferencias, la contabilidad de operaciones contractuales.

La justificación final de estos caminos es la comparación de los resultados a que llegan en el campo en que serán usados, con los obtenidos por la serie de capitalizaciones.

Tales son los términos con que se ha presentado este memorándum a financistas; pero a los ingenieros también puede interesarles como contestación a preguntas análogas frecuentes hoy.

Ellos verán, aunque no cupiera en el memorándum exponerlo, que las simplificaciones en el cálculo del tiempo que se denominará período de duplicación, son la limitación a los primeros términos del desarrollo en serie, de la exponencial que dá las capitalizaciones periódicas o continuas; en este cálculo, 0.693 es el logaritmo natural de 2.

Verán también dado, como valor aproximado del tiempo que se denominará retardo, en vez de un trinomio con cuadrados y cubos, un producto de tres factores

lineales, fáciles de memorizar; dos son determinados por las raíces extremas evidentes, y el otro, que aunque fuera constante, sería capaz de producir un máximo intermedio conocido, permite con fácil variación acercarse al exponencial, los arcos de parábola cúbica.

Estas limitaciones de los desarrollos dan precisión de uno por mil; los datos parecen superarla; pero sólo en su expresión convencional.

INTERESES ACUMULATIVOS

Si los intereses son agregados al capital en intervalos iguales, períodos de capitalización, para que también fructifiquen, se denominan acumulativos; se denominará multiplicador el factor por el cual habría que multiplicar el capital primitivo, para obtener el capital acumulado, incluyendo en éste, naturalmente, los intereses ganados en la fracción de período posterior a la última capitalización.

Si un plazo es la suma de varios consecutivos, el multiplicador que corresponde a la suma, es el producto de los que corresponden a los sumandos.

El tiempo necesario para obtener un multiplicador igual a 2, se denomina período de duplicación. Si el plazo es un número entero de períodos de duplicación, el multiplicador, es simplemente el producto de ese número de duplicaciones; así por ejemplo, 3 períodos producen un multiplicador igual a 8, y un capital se multiplica por 128, en 7 períodos de duplicación.

La comparación de resultados comprueba que en numerosas cuestiones usuales, el período de duplicación es, con aproximación suficiente, el número de años, entero o fraccionario, que se necesitan para ganar setenta por ciento, con interés simple.

Para alcanzar precisión de milésimos en el multiplicador bastan estos dos reajustes antagónicos: Primeramente disminuir al período así obtenido uno por ciento de su valor; lo que equivale a calcular los años necesarios para ganar sólo 0.693 con interés simple. En segundo lugar agregar a este número de años, tantas milésimas de año, cuántos días tenga el período de capitalización. Así, por ejemplo con 6% capitalizado semestralmente, el valor aproximado del período de duplicación es 11.67 años; el primer reajuste lo reduce a 11.55; el segundo reajuste agrega 0.180 y se obtiene finalmente 11.73.

Como los plazos que se presentan en las cuestiones no son en general los números cabales de períodos de capitalización, que ya se ha considerado, falta indicar la correspondencia entre la fracción del período de duplicación, que va creciendo de 0.000 a 1.000 y el multiplicador, que crece de 1.000 a 2.000; o mejor entre la fracción del período y la parte fraccionaria del multiplicador, que es la fracción que se ha ganado, de lo que será el total de intereses del período.

Como primera aproximación, se acepta que ambas fracciones, que parten simultáneamente de cero y llegan simultáneamente a la unidad, crecen manteniéndose iguales.

Pero en verdad, cuando va corrida la fracción 0,500 del período, se han acumulado sólo 0.414 del total de intereses que se acumulará en él; porque así el multiplicador de cada semi-período es 1.414 y el producto de ambos, dá la duplicación, ya que 1.414 multiplicado por 1.414 dá 2.

Se produce, pues, un retardo que va creciendo desde el comienzo del período hasta llegar a 0.086 y que se vá después recuperando para anularse al fin. Para reajustar estas fracciones se puede calcular con tres decimales el retardo, mediante la siguiente operación, para la cual no importa la cifra de milésimas de la fracción conocida.

El retardo es el producto de tres factores; la fracción conocida, la fracción que a ella le falta para completar el entero y la fracción que se obtiene escribiendo a continuación de 0.3 una cifra más, igual a las décimas de la fracción de período si ésta es la fracción conocida y si no igual a las décimas que faltan al multiplicador, para completar el entero. Así, por ejemplo, si la fracción es 0.184 de período, se obtiene un retardo que es el producto de 0.18 por 0.82 y por 0.32, igual a 0.047 y por consiguiente a la fracción 0.184 de período, corresponde la fracción 0.137; del multiplicador 1.137; la fracción 0.05 del multiplicador 1.05 tiene un retardo que es el producto de 0.05 por 0.95 y por 0.39, igual a 0.019 y por lo tanto, le corresponde la fracción 0.069 de período.

Ejemplo 1.—Una inversión avaluada en \$ 345.000, cuyos frutos se han invertido y capitalizado, ha llegado después de 24 años y 2 meses a \$ 1.450.000. Calcular el valor que tendrá cuando se completen 38 años, si se sigue capitalizando en la misma proporción.

El multiplicador ya obtenido, 4.20, es el producto del multiplicador 4 al que corresponden dos períodos de duplicación, por el multiplicador 1.05 al que se puede atribuir como primera aproximación, la misma fracción 0.05 de período. Los 24.17 años transcurridos son, por consiguiente, 2.05 períodos de 11.8 años cada uno. Los 13.83 años restantes son pues, 1.2 períodos. A este tiempo corresponden el multiplicador 2 por el período completo, el multiplicador 1.2 por la fracción, y por consiguiente, el producto 2.4 como multiplicador final de 1.450.000. El valor buscado es por lo tanto, \$ 3.500.000, como primera aproximación.

Haciendo los reajustes se encuentra que al multiplicador 1.05 corresponden 0.069 de período, como se vió en el ejemplo anterior. Los 24.17 años transcurridos son pues 2.07 períodos de 11.68 años y los 13.83 años restantes son 1.184 períodos. Al período corresponde el multiplicador 2 y a la fracción el multiplicador 1.137, como también se vió. El multiplicador final es 2.27 y el valor buscado \$ 3.290.000.

Se ha supuesto que los frutos se inviertan con frecuencia y no se ha hecho reajustes por el período de capitalización.

Ejemplo 2.—Calcular el interés necesario para que en un siglo, una suma se multiplique por 100.

El multiplicador 100, es el producto de 6 duplicaciones o sea 64, por 1.5 aproximadamente. Los 6.5 períodos de duplicación que este multiplicador requiere, forman el siglo; cada período es de 15 años. El interés pedido, que da 0.70 en 15 años, es 4.7% en primera aproximación.

Para reajustar el cálculo, se incrementa la fracción exacta del multiplicador, producto de 64 por 1.562, con el retardo 0.084, producto de las tres fracciones, 0.56 y 0.44 y 0.34. Se obtiene que en el siglo hay 6.646, períodos de duplicación, de 15.05 años. Suponiendo la capitalización semestral, hay que quitar 0.180 y resulta que en 14.87 años se gana el 0.693, o sea que el interés anual es 4.66%.

AMORTIZACION ACUMULATIVA

Es acumulativa la amortización de una deuda, si se va pagando con sumas periódicas iguales, comúnmente dividendos semestrales, de las que una parte es el interés del saldo adeudado y, fuera de una comisión constante si la hay, todo el resto amortización.

La parte que es amortización crece como si fuera un capital con interés acumulativo; en efecto, su incremento desde un dividendo al siguiente, es lo que disminuye

la parte del dividendo absorbida por el interés del saldo, que es igual al interés de la disminución, o sea, precisamente, al interés que corresponde a la amortización.

En el caso, por ejemplo, de una institución, que tiene varias deudas hipotecarias de diversos valores primitivos y diferentes edades, pero todas del 6%, la suma de lo que se contabilizará como amortizaciones en el próximo balance, excederá al anterior en 3%.

De la magnitud de la parte restante de los dividendos, se puede deducir la magnitud del saldo cuyos intereses se sirven con ella. Si los dividendos se pagan vencidos, los intereses del saldo a que el capital está reducido entre dos dividendos, formarán parte del dividendo que se pagará al final del semestre. Lo mismo pasa en nuestras deudas hipotecarias, pues en sus dividendos anticipados, figuran los intereses del saldo de capital, que se adeudaba en el semestre anterior.

Ejemplo 3.—Calcular el saldo de una deuda primitiva de \$ 37.500 del 6% con 1% de amortización, después de pagar el dividendo 25.

El primer dividendo, descontada la comisión, fué de 1125 para intereses y 187.50 para amortización y de 1312.50 en total.

En primera aproximación, siendo el período de duplicación 11.67 años, a los 12.5 años que transcurrirán hasta el dividendo 26, que son 1.07 períodos, corresponde un multiplicador igual al producto de 2 por 1.07 o sea igual a 2.14. La parte destinada a amortización, que fué de 187.50 en el primer dividendo, será pues 400 en el dividendo 26 y la destinada a intereses será 912. El saldo, cuyo 3% dá esta cantidad, es por consiguiente \$ 30.400.

Reajustado el cálculo, el período resulta de 11.73 años y hasta el dividendo 26 han transcurrido 1.066 períodos. Disminuída la fracción en el retardo (producto de 0.07 por 0.93 y por 0.31, igual a 0.020) el multiplicador de la amortización es de 2.092 y esta alcanzará en el dividendo 26 a 392.50. La parte de intereses será 920.00 y el saldo buscado, por lo tanto \$ 30.670.

Se ha contabilizado 30.664.80 de acuerdo con las tablas; la diferencia escapa a la precisión del camino.

En los problemas recíprocos, cuando se busca la fecha en que el saldo se reducirá a una suma prefijada, se puede seguir el mismo camino en sentido inverso; en general se llegará a una fecha intermedia entre dos pagos de dividendo.

De estos problemas, el más interesante es la cancelación en que el saldo de capital adeudado es igual a cero.

En el dividendo hipotético que seguiría a aquél en que se hubiera efectuado la cancelación exacta, nada habría para intereses y la amortización habría llegado a ser el total del dividendo. El multiplicador necesario para convertir la amortización inicial en este total, sirve para calcular el tiempo transcurrido desde el pago del primer dividendo hasta el pago del dividendo hipotético. El número de semestres que hay en este tiempo, es igual al número de dividendos necesarios para cancelar; pues se ha de incluir en ellos el primero y el de cancelación, pero no el hipotético.

Si el tiempo exigido por el multiplicador, es un número entero de semestres y además una fracción de semestre, se ha de pagar un número entero de dividendos completos y en la fecha siguiente la fracción complementaria de dividendo, aproximadamente.

Ejemplo 4.—Calcular el número de dividendos semestrales, necesarios para cancelar una deuda, con 5% de interés y 10% de amortización.

En primera aproximación, se ve que el multiplicador 1.5 de la amortización desde el primer dividendo hasta el dividendo hipotético, requiere 0,5 períodos de

duplicación. Este período es de 14 años. Se necesita pues, 7 años o sea 14 dividendos; resultado muy poco exacto.

Aumentando el multiplicador en el retardo 0.086 (producto de 0.50 por 0.50 y por 0.35) se obtiene 0.586 períodos de duplicación transcurrido hasta el dividendo hipotético. Hechos los reajustes del período, queda de 14.04 años. El tiempo transcurrido resulta por consiguiente, 8.22 años, o sea redondeando 16.5 semestres.

Se necesita pues, 16 dividendos completos y uno complementario de la mitad del valor normal.

Ejemplo 5.—Una deuda de \$ 250.000 al $4\frac{1}{2}\%$ de interés anual, ha de ser pagada en 30 dividendos semestrales iguales. Calcular su valor.

Lo absorbido por intereses en el primer dividendo es 5625; éste será el incremento que tendrá la amortización hasta el dividendo hipotético.

Siendo el período de duplicación 15.6 años; en primera aproximación, en 30 semestres hay 0.96 períodos y la amortización crece también en 0.96 de su valor; como este incremento es 5625, la amortización inicial era de 5850. El dividendo total buscado resulta por consiguiente de \$ 11.475.

Pero reajustando el período, queda de 15.58 años y en los 30 semestres hay 0.963 períodos. Descontando el retardo 0.015, resulta que 0.948 de la amortización inicial son 5625 y que ésta era por lo tanto, 5935. El dividendo buscado es por consiguiente, \$ 11.560.

Aquí termina el memorándum original que indica sólo operaciones sencillas. Se podría, sin embargo, alcanzar precisiones ligeramente superiores; por ejemplo, aceptando como tercer factor para calcular el retardo, uno igual, en función del período, a la suma de 0.304 y el ocho por ciento de la fracción; pero en función del multiplicador, igual a la suma de 0.259 y la sexta parte de la fracción que falta para completar el entero; en vez de escribir uniformemente a continuación de 0,3 las décimas de la fracción.

R. S. E.
