

Curso de Hidráulica General

(Continuación)

La expresión de la velocidad límite dada por Reynolds para el punto C, límite inferior es: (1)

$$U_o = K \frac{\eta}{D} \quad (m : s) \quad (29)$$

en que $K=19,8$ o sea tiene el valor

$$U_o = 19,8 \frac{\eta}{D} \quad (30)$$

Introduciendo en la expresión $U = \frac{8 \eta C^2}{\gamma D}$ el valor de $C=50$, que corresponde a los tubos lisos experimentados por Reynolds, se hubiera obtenido

$$U_o = \frac{20 \eta}{D} \quad (m : s) \quad (31)$$

valor casi igual al de Reynolds.

El límite superior es, según Reynolds, 6,6 veces mayor, o sea:

$$U_1 = \frac{130,7 \eta}{D} \quad (32)$$

Van a continuación algunos valores de las velocidades límites inferiores U_o y

(1) Reynolds escribe $U_o = \frac{1}{278} \frac{1}{1 + 0,0337 \epsilon + 0,00022 \epsilon^2} \frac{1}{D}$. (28). El valor de arriba equivale a esto, dejando el coeficiente de viscosidad con su valor en globo.

superiores U_1 , en función de los diámetros y temperaturas. Notemos entonces que

		$t =$	0°	10°	20°	50°	100°
		$\eta =$	0,000181	0,000133	0,000103	0,000056	0,000028
Diámetro en metros	0,001	U_0	3,62	2,66	2,06	1,12	0,56
		U_1	23,90	17,56	13,60	7,40	3,70
	0,002	U_0	1,81	1,33	1,03	0,56	0,28
		U_1	1,20	8,80	6,80	3,70	1,85
	0,005	U_0	0,72	0,53	0,41	0,22	0,111
		U_1	4,75	3,50	2,70	1,45	0,735
	0,01	U_0	0,35	0,26	0,20	0,11	0,054
		U_1	2,31	1,72	1,32	0,72	0,360
	0,025	U_0	0,282	0,21	0,16	0,09	0,043
		U_1	1,86	1,36	1,06	0,57	0,285
0,05	U_0	0,070	0,051	0,040	0,022	0,011	
	U_1	0,46	0,34	0,26	0,14	0,07	
0,1	U_0	0,035	0,026	0,020	0,011	0,005	
	U_1	0,24	0,17	0,13	0,070	0,035	
0,2	U_0	0,017	0,013	0,010	0,006	0,003	
	U_1	0,112	0,085	0,066	0,036	0,018	
0,5	U_0	0,007	0,005	0,004	0,002	0,001	
	U_1	0,046	0,032	0,026	0,013	0,007	
1	U_0	0,003	0,0026	0,002	0,0011	0,0005	
	U_1	0,023	0,017	0,013	0,007	0,0036	

velocidades menores que la U_0 del cuadro dan siempre régimen estratificado y las superiores a U_1 , turbulento.

Las experiencias de Gibson indican que la fórmula de Reynolds no es del todo aplicable a tubos de mayor diámetro que los experimentados por ese autor. Barres y Coker (1904), deducen de sus experiencias límites más alejados para las velocidades límites U_0 y U_1 . Eckman, en 1910, experimentando en los mismos aparatos de Reynolds, dice que la velocidad límite superior puede llegar a ser 3,66 veces mayor que la indicada por Reynolds.

Además de este límite natural de separación de ambos regímenes, es necesario observar que en adecuados casos se le puede variar enormemente. Tal sucede cuando una corriente se acelera rápidamente, igualándose las velocidades de todos sus filetes. En tal caso los frotamientos interiores disminuyen también porque la derivada dv/dn tiende a cero. En conos convergentes de 5° , $7^\circ 30'$, 10° y 15° observó Gibson que la velocidad límite superior subía a igualdad de sección con el ángulo de convergencia. Los aumentos de U_1 encontrados por Gibson en diámetros de casi 6 cm. son los siguientes:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & = & 5^\circ & 7^\circ 30' & 10^\circ & 15^\circ & \\ \frac{U_1 \text{ de Gibson}}{U_1 \text{ de Reynolds}} & = & 1,71 & 2,16 & 2,72 & 3,16 & \end{array}$$

Este aumento del campo del régimen estratificado se observa aún en canales de mayor magnitud con paredes lisas.

Los aumentos paulatinos de sección producen el efecto contrario, es decir, bajan la velocidad límite; así sucede, por ejemplo, en los conos divergentes o difusores.

28. Ecuación de las corrientes permanentes.—Como se ha visto, los frotamientos determinan la repartición de velocidades en la sección. En movimientos uniformes esa distribución es invariable a lo largo de la corriente; pero en movimiento gradualmente variado, incrementos positivos o negativos de altura de velocidad van haciendo cambiar esa repartición de velocidades. Propia es de los capítulos de las corrientes descubiertas y cerradas, la exposición de estas cuestiones; nos limitaremos aquí a la idea general.

Si partimos de velocidades iguales y las condiciones de la canalización son las que se requiere para el movimiento uniforme, dice Boussinesq que es necesaria una longitud de 30 veces el ancho de la sección para producir la repartición de velocidades del movimiento uniforme. Según algunas experiencias es mayor aun la longitud necesaria. Las experiencias generales de pérdida de carga por unidad de longitud sentadas para ambos regímenes suponen el movimiento uniforme producido con todas sus circunstancias perfeccionadas; es decir, incluida la repartición de velocidades. Fijando, sin embargo, nuestra atención en las corrientes descubiertas, hemos de aceptar que el movimiento uniforme, especialmente en régimen hidráulico, es teóricamente imposible y prácticamente escaso, aun contentándose con una aproximación poco rigurosa. En efecto, ¿cómo pretender la constancia absoluta de forma de sección, pendiente y rugosidad de paredes en lechos de canales? En realidad el movimiento de esas corrientes es gradualmente variado, poco diferente

del uniforme. Ahora bien, como en esta clase de corrientes es donde se ha medido la pérdida de carga, parece lógico aceptar que la expresión de ella, dada para corrientes uniformes, sea válida para las gradualmente variadas (1). Al volver a tratar de esta clase de corrientes, se tratará de esto con más detalle.

Se acepta, pues, que la expresión de la pérdida de carga es válida para todos los movimientos turbulentos permanentes. Recordando la ecuación completa de Bernoulli para el caso en que existan pérdidas de carga únicamente de frotamiento:

$$\Sigma \Delta = \int_0^l J ds = \int_0^l \frac{b U^2}{R} ds, \text{ podremos escribir la ecuación (44, del capítulo anterior:}$$

$$z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} + \int_0^l \frac{b U^2}{R} ds = Cte. \quad (33)$$

Si derivamos esta expresión respecto al camino, tendremos:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{b U^2}{R} = 0 \quad (34)$$

En la ecuación de arriba z es la cota de un filete cualquiera. La línea definida anteriormente como eje hidráulico es, en los canales y cañerías de formas usuales, un filete líquido; z puede ser entonces la cota del eje hidráulico, y dz/ds su inclinación, es decir, la de la superficie libre si se trata de corrientes de contorno abierto o canales (Fig. 29); en este caso el segundo término desaparece. Tratándose de cañerías o corrientes cerradas, es el lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones sucesivas (Fig. 30); en estos puntos se verifican las presiones medias de la sección. En todo caso dz/ds es el seno del ángulo que forma el eje hidráulico con la horizontal: $\text{sen } I$, en corrientes abiertas siempre pequeño, de modo que se puede poner $\text{tg } I$ o simplemente I . Como dz es negativo, se pone $-\text{sen } I$ o $-\text{tg } I$, según los casos:

En resumen, la ecuación general de las corrientes permanentes cerradas o cañerías es:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} - \text{sen } I + \frac{d}{ds} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{b U^2}{R} = 0 \quad (35)$$

(1) Una discusión teórico experimental de la idea expuesta puede verse en «Escorrimento variado del agua en los canales», Salas Edwards, 1933, Págs. 33 y siguientes.

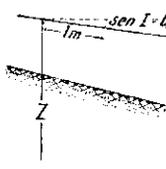


Fig. 29

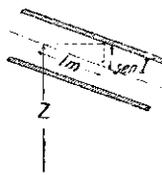


Fig. 30

y la de canales o corrientes abiertas:

$$-I + \frac{d}{ds} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{b U^2}{R} = 0 \quad (36)$$

Si las corrientes, además de ser permanentes son uniformes, la derivada de la velocidad respecto al camino es nula, como también lo es la variación de α . de modo que las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\text{corrientes cerradas:} \quad \frac{I}{\gamma} \frac{dp}{ds} \text{ sen } l = \frac{b U^2}{R} \quad (37)$$

$$\text{corrientes abiertas:} \quad I = \frac{b U^2}{R} \quad (38)$$

ecuaciones que comentaremos en los capítulos respectivos, notando aquí únicamente que la ecuación (36, es la del movimiento gradualmente variado permanente en los canales.

CAPITULO V

Singularidades en contorno cerrado

29. Generalidades.—30. Velocidad de la vena contraída. Principio de Torricelli.—31. Contracción y reacción parietal.—32. Coeficientes experimentales de gasto para orificios de pared plana delgada. Ejemplos.—33. Pérdidas de carga singulares.—34. Ensanches bruscos y paredes gruesas. Ejemplo.—35. Boquillas y conos. Ejemplos.—36. Codos y curvas.—37. Fenómenos incidentales: remolinos de succión.—38. Inversión de la vena.—39. Trayectoria de los chorros. Ejemplo.—40. Velocidad inicial.—41. Vaciamientos.

29. Generalidades.—Se llaman *singularidades* a los cortos trozos de escurrimiento líquido en que se verifican grandes variaciones de las condiciones hidráulicas, como variaciones de presión, de velocidad, etc.

Las llamaremos en *contorno cerrado* si la corriente pasa dentro de paredes sólidas que la rodean totalmente, por ejemplo, un orificio por el que se escurre agua o un codo de cañería.

Las llamaremos en *contorno abierto*, si existe en la singularidad una parte de la corriente sin pared sólida, por ejemplo, un estrechamiento local de un canal, un vertedero, etc. Las singularidades de contorno cerrado que se estudian en este capítulo, son: el escurrimiento por orificios y las pérdidas de carga singulares. Estas últimas se verifican dentro de tubos a consecuencia de cambios bruscos o paulatinos de sección o de dirección.

Se llama *orificio* en Hidráulica a la abertura practicada en la pared de un depósito que deja escurrir la corriente líquida por toda su sección. Si el contacto con la vena líquida tiene lugar en una línea de todo el contorno, se llama *orificio en pared delgada* (Fig. 31). Si alcanza a aplicarse en la pared de la perforación, se llama *orificio en pared gruesa* (Fig. 32).

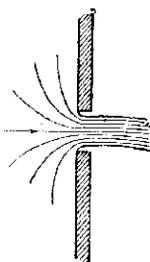


Fig. 31

Los filetes exteriores de la vena que sale de un orificio de pared delgada, escurren aguas arriba de la línea de contacto aplicados a la pared del depósito. Después lo hacen al aire libre. Estas trayectorias pasan rápidamente de la dirección tangencial a la pared a una dirección prácticamente normal a ella; tienen una curvatura

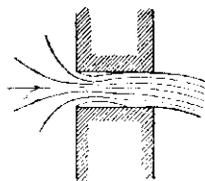


Fig. 32

fuerte pero no infinita, y un radio de curvatura finito, pues las fuerzas que actúan sobre las moléculas de estos filetes no pueden producir una discontinuidad en su dirección o velocidad. De aquí se origina una contracción o reducción de la vena, a no ser que el orificio se haya redondeado en forma conveniente para evitarla (Fig. 33). (1)

Se puede suprimir también en parte la curvatura de los filetes ubicando el orificio junto a las paredes del fondo del depósito (Fig. 34). Pueden hacerse menos pronunciadas mediante adecuadas disposiciones (Fig. 35). Se obtienen así *contracciones parcialmente suprimidas* y *contracciones incompletas*, respectivamente.

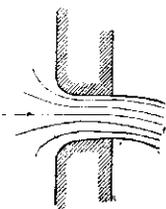


Fig. 33

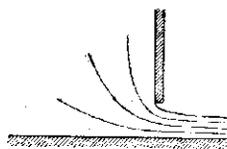


Fig. 34

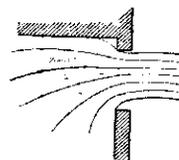


Fig. 35

En una sección situada aguas abajo del orificio, a una distancia menor que las dimensiones de él, debería aceptarse en todos los casos la ley hidrostática, pues los filetes son ahí paralelos. Si la vena desagua en una atmósfera gaseosa, la presión que la rodea es prácticamente constante (en la práctica generalmente la atmosférica). Tomando en cuenta que las dimensiones de la vena son casi siempre reducidas, se puede aceptar que la *presión que la rodea rige en toda la vena contraída*.

(1) La tensión superficial tiene en la contracción de la vena una parte muy secundaria, como se evidencia suprimiendo perfectamente la contracción en parte del perímetro de un orificio que desagua al aire, con tabiques interiores que impidan únicamente la curvatura de las trayectorias de las partículas afluentes.

Si el orificio no desagua en una atmósfera constante, sino que está sumergido, como en la Fig. 36, o parcialmente sumergido como en la Fig. 37, en la vena rige la ley hidrostática con la altura piezométrica correspondiente a la masa líquida que la rodea.

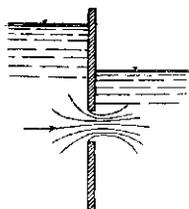


Fig. 36

En orificios de pared gruesa o en disposiciones equivalentes, la vena se contrae en la entrada y se ensancha después hasta llenar todo el tubo, ocasionándose así una pérdida de carga.

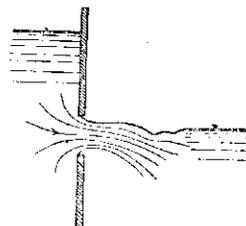


Fig. 37

Los orificios de pared delgada quedan caracterizados por la contracción; los de paredes gruesas, por la pérdida de entrada, pérdida de frotamientos y contracción final, circunstancias que pueden faltar o aminorarse según las disposiciones.

30. Velocidad de la vena contraída. Principio de Torricelli.—La aplicación del teorema de Bernoulli da la velocidad de un filete líquido en la vena contraída.

Un orificio está generalmente precedido de un estanque de dimensiones considerablemente mayores que las suyas. En ese estanque son pequeñas o despreciables las velocidades; en consecuencia, se puede aceptar que rige la ley hidrostática en una sección algo separada del plano del orificio, tal como A (Fig. 38). Tomemos como plano de referencia el horizontal que pasa por el centro de gravedad del orificio y apliquemos el teorema citado a la molécula de trayectoria cualquiera, tal como la que pasa por N. La suma de Bernoulli en A vale simplemente $h + p_a/\gamma$, llamando p_a a la presión atmosférica. Si llamamos u la velocidad del filete y p_c la presión en N, se tendrá la igualdad:

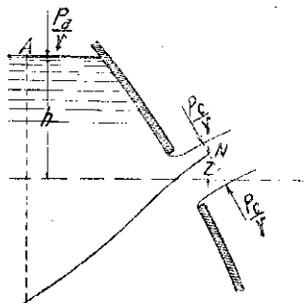


Fig. 38

$$h + \frac{p_a}{\gamma} = z + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$$

Esta ecuación general, en que z , cota del filete en la vena contraída, tiene su signo propio (negativo en la Fig. 38), nos da la velocidad:

$$u = \sqrt{2g \left(h + \frac{p_a}{\gamma} - z - \frac{p_c}{\gamma} \right)}$$

La cota piezométrica del filete en N es $z + p_c/\gamma$, por lo tanto $h + \frac{p_a}{\gamma} - z - \frac{p_c}{\gamma}$

es el exceso de la suma de Bernoulli de aguas arriba sobre la cota piezométrica de aguas abajo (en la vena contraída), que llamaremos la carga, H .

La ecuación anterior nos queda.

$$u = \sqrt{2gH} \quad (1)$$

Si $\frac{p_a}{\gamma} = \frac{p_c}{\gamma}$ caso corriente de estanques que desaguan al aire libre y z es despreciable al lado de h , la ecuación (1), se reduce a

$$u = \sqrt{2gh} \quad (2)$$

que nos dice que son iguales todas las velocidades de la vena contraída, y que esta velocidad queda determinada por la raíz de la altura líquida sobre el centro de gravedad del orificio.

La ecuación (1), que da la velocidad de la vena contraída, recibe el nombre de «principio de Torricelli».

En orificios sumergidos, el exceso de la suma de Bernoulli de aguas arriba sobre la cota piezométrica de la vena contraída, es constante para todos los filetes, siempre que las velocidades en los estanques anterior y posterior sean despreciables, (Fig. 39) pues:

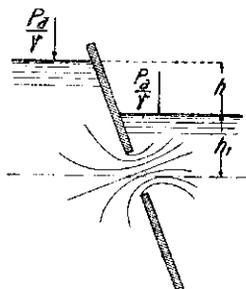


Fig. 39

$$H = \frac{p_a}{\gamma} + h + h_1 - \frac{p_a}{\gamma} - h_1 = h$$

En consecuencia, todas las velocidades son iguales en la vena contraída, cualesquiera que sean los valores individuales de z de los filetes.

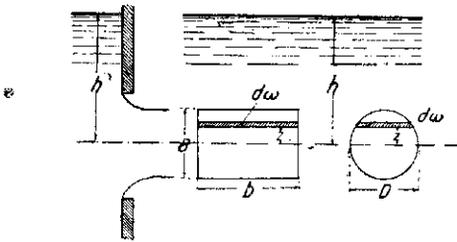
En orificios de poca carga no son despreciables los z individuales. En las venas horizontales de orificios en pared vertical los z son nulos en término medio; pero las velocidades dependen de $\sqrt{h-z}$, por lo que su término medio es algo diferente. En orificios practicados en paredes horizontales las venas son verticales y los z que adquieren su mayor valor relativo, son todos iguales; por lo tanto las velocidades lo son. Si se acepta rigurosamente la hipótesis de constancia de presión en la vena contraída se puede calcular el coeficiente de velocidad ϕ , que multiplicado por $\sqrt{2gh}$ da el valor de la velocidad media de la sección. Lo haremos en el supuesto caso de $\frac{p_c}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma}$, caso general de pared delgada. Si llamamos Ω la sección de la vena contraída y $d\omega$ la sección de un filete que tiene cota z , en ella tendremos:

$$\Omega \phi \sqrt{2gh} = \int_0^{\Omega} \sqrt{2g(h-z)} d\omega$$

de donde

$$\varphi = \frac{l}{\Omega} \int_0^{\Omega} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{2}} d\omega \quad (3)$$

En los casos sencillos de venas horizontales, en los orificios de forma rectangular de lados a y b o circulares de diámetro D (Figs. 40 y 41) se llega a las expresiones de φ siguientes:



Figs. 40 y 41

Orificio rectangular:

$$\varphi = \frac{l}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \sqrt{1 - \frac{z}{h}} dz$$

Orificio circular:

$$\varphi = \frac{\delta}{\pi D^2} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \sqrt{\left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(\frac{D^2}{4} - z^2\right)} dz$$

ejecutadas las integraciones se obtienen los siguientes valores numéricos en función de h/a y h/D :

	h/a o $h/D = 0,50$	$1,00$	$1,50$
Orificio rectangular	$\varphi = 0,94$	$0,99$	$1,00$
Orificio circular	$\varphi = 0,95$	$0,99$	$1,00$

Se ve que en casos de cargas comparables a las dimensiones del orificio el coeficiente vale casi la unidad, y para el menor valor de h , en el caso límite irrealizable, en que se cubriera apenas el borde superior del orificio, el coeficiente difiere poco de ella.

En la realidad la hipótesis de igualdad de presión en toda la vena contraída no se cumple rigurosamente; además, los filetes más veloces tratan de acelerar a los más lentos y viceversa, de modo que se puede aceptar la igualdad de todas las velocidades en la vena contraída y el cumplimiento del Principio de Torricelli (1). Entre otras experiencias que demuestran esta conclusión pueden citarse las de Bazin (1896).

Las velocidades individuales que tienen grandes diferencias en el plano del orificio se igualan rápidamente a partir de él y puede decirse que son iguales a una distancia comprendida entre $3/4$ y 1 vez la menor dimensión del orificio. En esa sección son iguales las velocidades a la velocidad media y cumplen todas el principio de Torricelli, siendo esa la sección de la vena contraída.

(1) Notemos también que en la vena que sale de un orificio el escurrimiento ha experimentado una gran aceleración, de modo que todas las velocidades tienden a igualarse. La corriente en la vena contraída es fácilmente estratificada, con velocidades mucho mayores que la crítica de turbulencia ordinaria.

No debe creerse que la sección de la vena contraída sea una sección mínima de escurrimiento de la vena libre en una atmósfera constante, pues, en realidad, la vena permanecería de sección constante si se pudiese prescindir de la gravedad. Tal cosa se evidencia en las experiencias de Bazin citadas, que demuestran que la disminución de la sección en un chorro, a contar desde la vena contraída, corresponde a las leyes de la Mecánica que rigen la caída de los cuerpos.

Se han medido aisladamente velocidades de la vena contraída algo superiores a las que da la fórmula de Torricelli; esto se debe al enrarecimiento del aire debido al arrastre constante que va haciendo la vena líquida.

31. Contracción y reacción parietal. Se llama coeficiente de contracción a la razón entre la sección de la vena contraída y la sección del orificio.

Se puede determinar la contracción en casos sencillos extremos por la aplicación del teorema de las cantidades de movimiento a la masa líquida encerrada por la superficie gausa ideal, límite de las velocidades sensibles en el seno del líquido, por la pared contigua a la abertura y por la vena contraída (Fig. 42).

El incremento de las cantidades de movimiento en la unidad de tiempo se reduce al de la masa que en ese tiempo entra y sale de los límites fijados, que en la hipótesis de escurrimiento permanente, es la masa del gasto. Se tomará como eje de proyección uno normal al plano del orificio, que tendrá la dirección general del escurrimiento. Si Ω es la sección del orificio, μ el coeficiente de contracción, y se acepta $\varphi = 1$ esa masa es:

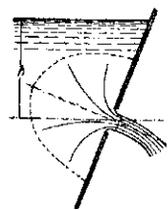


Fig. 42

$$\frac{\gamma}{g} \mu \Omega \sqrt{2 g h}$$

El incremento de la velocidad es $\sqrt{2 g h}$, pues la inicial es nula. Así, proyectando sobre el eje el incremento de las cantidades de movimiento en la unidad de tiempo, se obtiene:

$$\frac{\gamma}{g} \mu \Omega 2 g h$$

La presión hidrostática sigue obrando sobre la superficie gausa que envuelve la región líquida de velocidades sensibles, pues en ella las circunstancias son iguales, exista o no escurrimiento. En la vena contraída la presión es la atmosférica, lo mismo sobre la superficie de la vena hasta el plano del orificio. En la pared anular encerrada entre la superficie gausa y el orificio, la conservación de la suma de Bernoulli exige la disminución de la presión hidrostática, pues parte de ella se ha transformado en altura de velocidad. Calculando directamente por partes la resultante de las fuerzas exteriores encontramos que sobre el área del orificio la presión baja de la hidrostática sobre la superficie gausa, a cero en la superficie de la vena contraída. Por lo tanto, la diferencia en esa parte es $\gamma h \Omega$. No sabemos calcular el descenso δ de presión sobre la superficie anular que rodea al orificio, pero podemos expresarlo en función del descenso de presión en la superficie del orificio poniendo:

$$\delta = K \gamma h \Omega$$

Por lo tanto, el teorema dice:

$$\frac{\gamma}{g} \mu \Omega 2gh = \gamma h \Omega (1 + K)$$

de donde

$$\mu = \frac{1 + K}{2} \quad (4)$$

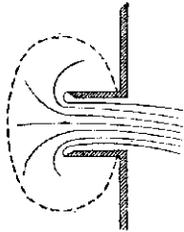


Fig. 43

El caso extremo se verifica reduciendo a *cero* la proyección, sobre el eje de la vena, del descenso de presión en el anillo circunvecino al orificio; esto se consigue en el *tubo de Borda* (Fig. 43) que, según la expresión (4), debe tener $\mu = 0,50$, coeficiente de contracción verificado por la experiencia.

Como la ley de semejanza indica que existiendo semejanza geométrica entre dos orificios, existe, en el escurrimiento, semejanza mecánica (1), se sigue que los coeficientes de contracción dependen sólo de la forma del orificio, si ésta no es demasiado pequeña y no depende de las dimensiones absolutas de él. Tiene, por lo tanto, un valor propio para cada forma de orificio.

Estudios analíticos complejos, que no es del caso enumerar ni detallar aquí, han llevado a calcular el coeficiente en casos ideales; tal es, por ejemplo, el de Kirchhoff, que llega a determinar que la vena de un orificio de ancho infinito tiende asintóticamente a: (Fig. 44).

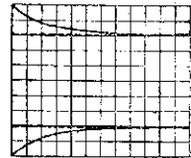


Fig. 44

$$\frac{\pi}{\pi + 2} = 0,611 \quad (5)$$

La insuficiencia de los estudios de esta naturaleza y las dificultades analíticas han llevado a considerar los coeficientes de contracción como constantes experimentales. En paredes delgadas, siempre que la menor dimensión del orificio no baje de 0,05 m., μ es más o menos constante y vale 0,60. Esto da para K el valor 0,2. En boquillas redondeadas (Fig. 45), el coeficiente de contracción es $\mu = 1$, y por lo tanto, en ellas $K = 1$, que equivale a decir que el descenso de presión δ , en el anillo que rodea al orificio, tiene por valor el descenso total que se efectúa en el hueco mismo.

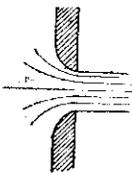
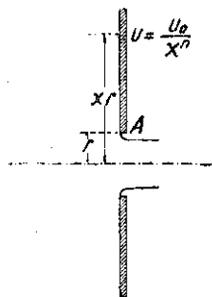


Fig. 45

(1) En efecto, dos orificios geoméricamente semejantes, cuyas dimensiones guardan la relación λ , darán fenómenos semejantes si se prescinde de frotamientos interiores, pues se supone que el escurrimiento está determinado por las presiones hidrostáticas de dimensiones $L^{-1} M T^{-2}$ que actúan en los centros de gravedad y por la constancia de la densidad, de dimensiones $L^{-3} M$. Si llamamos α a la razón de las presiones y μ y τ las escalas de masa y tiempo, tenemos $\alpha = \mu/\tau^2 \lambda$; $\mu/\lambda^3 = 1$; relaciones que nos dan: $\mu = \lambda^3$; $\tau = \lambda/\sqrt{\alpha}$. Los frotamientos parietales dependientes de γB hacen subsistir esta proporcionalidad de μ y τ , pues las dimensiones de γB son $L^{-3} M$ iguales a la densidad constante. En cambio, los interiores, proporcionales a ϵ de dimensiones $L^{-1} M T^{-1}$ exigirían $\mu/\lambda \tau = 1$, condición que introducida arriba daría finalmente para la semejanza: $\alpha = 1/\lambda^2$, es decir, cargas inversamente proporcionales a las dimensiones del orificio para que se verifique la semejanza.

Para formarse una idea de la rapidez con que decrecen las velocidades en la pared anular que rodea al orificio, se puede suponer que la velocidad u , en un punto cualquiera que dista xr del centro del orificio, sea una función monomía de la velocidad u_0 que hay en A (Fig. 46), tal como:



$$u = \frac{u_0}{x^n}$$

El descenso de presión a la distancia xr del orificio es evidentemente:

$$\gamma \frac{u^2}{2g} = \gamma \frac{u_0^2}{2g} \cdot \frac{l}{x^{2n}}$$

Fig. 46

pero el descenso en A , $\gamma \frac{u_0^2}{2g}$ es igual a γh , luego el de la distancia x es $\frac{\gamma h}{x^{2n}}$.

En todo el anillo elemental $2\pi r^2 x dx$ hay ese mismo descenso de presión. El descenso total en todo el anillo indefinido es, pues,

$$\delta = \int_1^\infty \frac{2\gamma h \pi r^2}{x^{2n-1}} dx$$

La razón K entre el descenso y $\gamma h \Omega$, siendo $\Omega = \pi r^2$, vale según esto

$$K = 2 \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2n-1}}$$

$$K = \left[-\frac{2}{(2n-2)x^{2n-2}} \right]_1^\infty = \frac{l}{n-1}$$

En pared delgada $K=0,2$. Por lo tanto, introduciendo este valor en la ecuación, se obtiene $n=6$, lo que significa que las velocidades decrecen en la pared a la inversa de la sexta potencia de la distancia al orificio.

Si en vez de un anillo indefinido tiene éste un ancho a y se acepta $n=6$, como se acaba de decir, (Fig. 47) se tiene:

$$K = 2 \int_1^{1+\frac{a}{r}} \frac{dx}{x^{2n-1}} = \left[-\frac{2}{10x^{10}} \right]_1^{1+\frac{a}{r}}$$

$$K = 0,2 \frac{0,2}{\left(1 + \frac{a}{r}\right)^{10}}$$

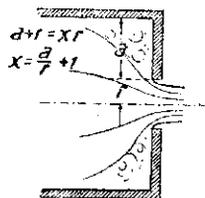


Fig. 47

valor que introducido en el de μ de la ecuación (4, nos da:

$$\mu = 0,6 - \frac{0,1}{\left(1 + \frac{a}{r}\right)^{10}} \quad (6)$$

que con los a/r que se indican en el cuadro adjunto, da los siguientes valores:

$a/r = 0$	0,1	0,2	0,4	0,6	1	más de 1
$\mu = 0,500$	0,539	0,584	0,596	0,599	0,600	0,600

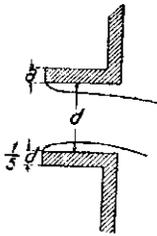


Fig. 48

Si estos cálculos no coinciden exactamente con la realidad, revelan, sin embargo, la importancia que tienen los anchos del anillo, que por pequeños que sean aumentan el coeficiente del tubo de Borda, bastando un ancho de $1/5$ de diámetro, como dice Weisbach ($a/r=0,4$) (Fig. 48) para hacerlo casi igual al de pared plana delgada. A la inversa, se puede deducir que el menor redondeo de una pared delgada sube el coeficiente de una boquilla, como lo experimentaron Weisbach, Ellis y Stewart.

La supresión de la contracción en parte del perímetro hace aumentar el coeficiente μ . Conviene notar, sin embargo, que virtualmente se pueden establecer tabiques que dividan el depósito y la vena, según uno o varios planos de simetría, sin que modifiquen el escurrimiento (Fig. 49), originando orificios de contracción incompleta, suprimida en parte, con coeficientes de contracción igual al del orificio total. Esta idea de Boussinesq, que no confirma del todo la experiencia, tiene importancia, pues indica que la ubicación de la supresión influye en el aumento del coeficiente de contracción.

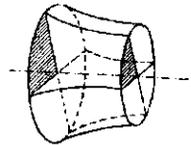


Fig. 49

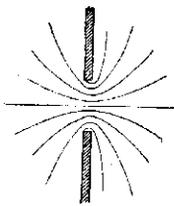


Fig. 50

En los orificios sumergidos nada teórico se ha podido, sentar respecto a los coeficientes de contracción. Los resultados experimentales llevan a atribuirles los mismos coeficientes de la vena que desagua al aire libre. Sin embargo, el fenómeno debe ser distinto. La Hidrodinámica plana indicaría que los filetes tomarían trayectorias hiperbólicas confocales en los bordes del orificio (Fig. 50).

32. Coeficientes experimentales de gasto para orificios en pared plana delgada.

—El gasto que sale por un orificio es el producto de la velocidad $\varphi \sqrt{2gh}$ de la vena contraída por la sección $\mu \Omega$ de ella:

$$Q = \varphi \mu \Omega \sqrt{2gh} \quad (7)$$

Se llama coeficiente de gasto al producto de los coeficientes de velocidad y contracción y se le designa por m :

$$m = \mu \varphi \tag{8}$$

$$Q = m \Omega \sqrt{2 g h} \tag{9}$$

En las paredes delgadas φ vale, como se ha visto, prácticamente la unidad; de aquí que se confunde fácilmente μ con m . El coeficiente m que engloba todas las variaciones de φ y μ es un coeficiente netamente experimental que se determina en las distintas condiciones posibles por medio de la ecuación (9).

La numerosísima serie de experimentadores dan para m tres y aun cuatro cifras. Sus tablas, formadas siempre por interpolación y extrapolación, no concuerdan más allá de la segunda cifra en los casos más claros y definidos. Esto representa, generalmente, diferencias del 1% en contracciones completas que en los demás casos raras veces bajan del 2%.

Al ingeniero le basta un resumen o término medio de estos resultados. Si necesita mayor precisión debe recurrir a las experiencias originales.

Las experiencias que se han hecho en contracciones incompletas difieren enormemente entre sí. Esto se debe a que tiene gran influencia en los resultados la inmensa variedad de circunstancias, que han sido muchas veces mal apreciadas por los experimentadores. Inútil es, con mayor razón, la exactitud aparente de la tercera cifra de los coeficientes, y es indispensable recurrir a las fuentes originales cuando se requiere alguna precisión, pues en los mejores casos habrá errores probables de 2% que pueden llegar a 10% en los peor definidos.

A. Paredes planas delgadas, contracción completa.—Orificio en pared delgada es aquel cuya pared tiene un espesor menor que la mitad de su menor dimensión: $e/r < \frac{1}{2}$ (Fig. 51). El criterio que fija esta dimensión es el espacio en que la vena se contrae. Para que la contracción sea completa se acepta que pueda trazarse alrededor del orificio una superficie de ancho constante que sea por lo menos 10 veces mayor que la dimensión de éste (1). Este tipo de orificio ha sido experimentado por Bilton; Poncelet y Lesbros; Bazin; Hamilton Smith; Gräf y Weisbach. Las tablas de los valores experimentales de las experiencias de Poncelet y Lesbros, Hamilton Smith, Bilton, Ellis y Stewart van en las **Tablas N.ºs 4, 5, 6 y 7**. Nos limitaremos a indicar aquí las conclusiones a que conduce un atento estudio comparativo entre ellas.

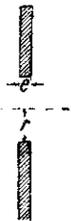


Fig. 51

1.º Si las dimensiones del orificio y las cargas no son muy pequeñas, el coeficiente es casi independiente de ellas y vale aproximadamente 0,60; pero a medida que las cargas y las dimensiones disminuyen, aumenta algo este coeficiente, volviendo a disminuir nuevamente cuando la carga excede poco las dimensiones del orificio. Experiencias aisladas parecen revelar algo contrario a lo dicho.

(1) Si el orificio es circular, el ancho del anillo será 2,32 radios, Si es cuadrado y la superficie anular está encerrada por otro cuadrado, el ancho de ella es 1,16 veces el lado. Si es rectangular con razón de lados 1:1,5 y se supone también rectangular la superficie anular, su ancho será de 1,41 veces el lado menor. En orificio rectangular de razón de lados 2, el ancho de la superficie anular sube a 1,61 y si la razón de lados es 5, sube a 2,34 veces el lado menor.

2.º A igualdad de carga y área el coeficiente es tanto menor cuanto más cercana al círculo es la forma del orificio. El rectángulo cuya proporción de lados es 1 : 16 excede en coeficiente al de 1 : 4; éste al triángulo; éste al cuadrado, y éste al círculo de igual área.



Fig. 52

3.º La orientación del orificio no tiene influencia en el coeficiente. Así, es igual al coeficiente de un cuadrado con su diagonal vertical o con su lado vertical, etc.

4.º Se puede aceptar que los orificios que tienen igual su menor dimensión, tengan igual coeficiente; idea que se expresa en la Fig. 52.

5.º Los orificios inclinados y horizontales dan coeficientes ligeramente superiores a los verticales. Para los sumergidos se debe tomar igual coeficiente que los que desaguan al aire libre. (Valores experimentales en **Tabla N.º 7**).

6.º Parece que la temperatura aumenta el coeficiente m .

7.º Otros líquidos dan coeficientes de gasto diferentes del que da el agua: en el aceite de máquinas espeso $m = 0,73$; el mercurio tiene el mismo coeficiente que el agua.

A continuación va una Tabla de coeficientes prácticos, resumen de todas las

h en metros	Diámetro o lado menor						
	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30
0,10	0,68	0,65	0,63	0,61	0,59
0,20	0,66	0,64	0,62	0,60	0,60	0,59
0,50	0,64	0,63	0,61	0,60	0,60	0,60	0,60
1,00	0,63	0,62	0,61	0,60	0,60	0,60	0,60
5,00 y más	0,62	0,61	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60

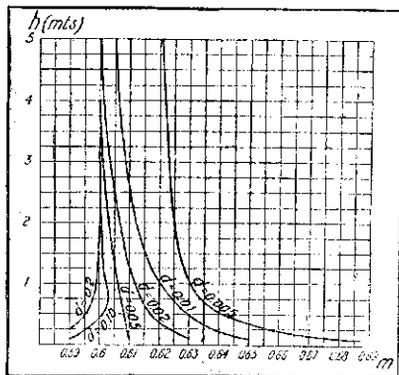


Fig. 53

experiencias citadas, que es suficiente para el uso del ingeniero. En el gráfico de la Fig. 53 aparece este cuadro. Con ayuda de él pueden hacerse interpolaciones rápidas,

B. Pared plana delgada. Contracción incompleta.—Se deben distinguir en las contracciones incompletas dos formas: Contracciones imperfectas y contracciones suprimidas.

Si la superficie anular de baja presión y ancho constante es menor de 10 veces el área del orificio se produce una contracción menor que la total o completa y se modifica, por consiguiente, el coeficiente de gasto. Esta contracción se llama imperfecta.

Inútil es reproducir las fórmulas empíricas dadas por Weisbach para este caso, solamente indicaremos en el gráfico de la Fig. 54 los resultados prácticos de su

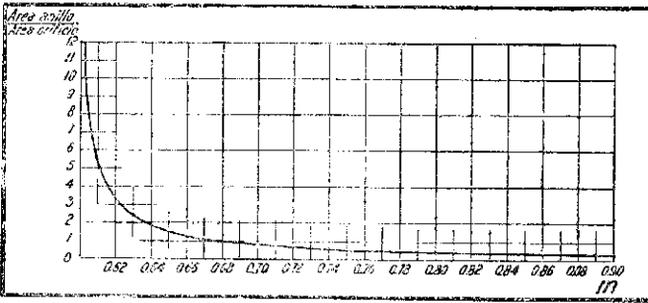
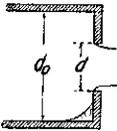


Fig. 54

aplicación, partiendo de $m = 0,6$ para el caso de contracción completa, de modo que si en este caso m es algo diferente de este valor ha de hacerse una pequeña corrección.

También se usa la corrección siguiente en canalizaciones circulares (Merriman):

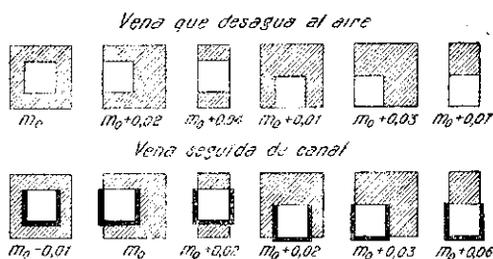


$$\begin{aligned} d/d_0 &= & 0 & 0,20 & 0,40 & 0,60 & 0,70 & 0,80 & 0,90 & 0,95 & 1,00 \\ m &= m_0 + & 0 & 0,01 & 0,03 & 0,07 & 0,09 & 0,12 & 0,19 & 0,26 & 0,40 \end{aligned}$$

Fig. 55 en que d_0 es el diámetro exterior y d el del orificio (Fig. 55) y m_0 es el coeficiente de contracción completa.

Para las contracciones suprimidas ha dado Bidone una fórmula cuyos resultados no son satisfactorios y que no toma en cuenta la ubicación de la parte del perímetro en que se suprime la contracción. Han experimentado algunos hidraulicistas, pero sus resultados no concuerdan bien, debido a la poca uniformidad en controlar las circunstancias accidentales que tienen gran influencia, según se ha expuesto anteriormente. Si la vena es recibida en un canal, en vez de desaguar al aire libre, parece producirse una pérdida de carga singular que hace disminuir el coeficiente de gasto. En realidad, las condiciones del canal tienen influencia preponderante. En casos análogos, pueden consultarse las tablas que van al final de este capítulo. La **Tabla N.º 8**, con las experiencias de Poncelet y Lesbros en orificios cuadrados de 0,2 m. de lado, y la **Tabla N.º 9**, también con experiencias de Poncelet y Lesbros en orificios rectangulares de 0,2x0,1 m. La **Tabla N. 10**,

con las experiencias de Stewart (1908), que coinciden bien con la de Rogers y Smith (1916). Aquí presentamos una escala de correcciones para los casos prácticos,



Estos coeficientes suponen cargas grandes m_0 depende de las dimensiones del orificio de la carga.

Fig. 56

del coeficiente de gasto y aun una diferencia entre éste y el de contracción. He aquí los resultados en función de la razón a/h entre la abertura a y la carga. Las aberturas experimentadas variaron de 2 a 12 cm., y las cargas, de 0,09 a 0,59 mts.

$\frac{a}{h} = 0,05$	0,075	0,10	0,15	0,20	0,30	0,50	0,80	1,00
$m = 0,67$	0,645	0,63	0,61	0,60	0,595	0,59	0,60	0,61
$\mu = 0,65$	0,62	0,61	0,60	0,593	0,587	0,58	0,575	0,575

Los mismos coeficientes de gasto son válidos, según estas experiencias, si el resalto cubre la compuerta o si es rechazado por el torrente que ella produce.

EJEMPLO N.º 1.—En el fondo de un estanque cilíndrico de eje vertical de 0,2 m. de diámetro hay un orificio circular de pared delgada, concéntrico con la base del cilindro, de 0,1 m. de diámetro. ¿Qué altura toma el agua dentro del estanque si le entra por la parte superior y sale por el orificio del fondo un gasto de $Q=0,020 \text{ m}^3/\text{s}$?

La ecuación (9), del gasto nos dice:

$$0,020 = m \times 0,00785 \sqrt{2gh} \quad \text{o sea} \quad h = \frac{0,331}{m^2}$$

El coeficiente de gasto m , es el de contracción imperfecta, pues el anillo que rodea al orificio no tiene una área 10 veces mayor que la del orificio. Según el cuadro de la página anterior, llamando d_0 el diámetro del estanque y d el del orificio, se obtendría

(1) Las experiencias de Boileau son en general discutidas por la poca exactitud de los aforos; estos coeficientes los hemos puesto aquí, porque los hemos comprobado en el laboratorio. En ellas se ha encontrado, como se ve en el cuadro, que el coeficiente φ es mayor que la unidad, hecho que también hemos comprobado experimentalmente y que se debe al gran arrastre de aire junto al torrente.

para $\frac{d}{d_0} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$, un coeficiente $m = m_0 + 0.05$. El coeficiente m_0 depende de la carga y de la dimensión del orificio. Nos formamos idea de la magnitud de la carga h , tomando, a priori, un coeficiente de gasto $m_0 = 0.60$, por lo tanto, $m = 0.65$. Según esto, la carga tiene un valor cercano a 0.8 m. Esta magnitud de la carga justifica el de $m_0 = 0.60$ que previamente se tomó, y por lo tanto $m = 0.65$ es, según el cuadro, definitivo.

Si calculamos m por medio del gráfico de Weisbach, formando la razón de las áreas, que en nuestro caso es:

$$\frac{\text{área del anillo}}{\text{área del orificio}} = \frac{d_0^2 - d^2}{d^2} = 3$$

obtendríamos, leyendo en la *figura 63*, $m = 0.62$ en vez de 0.65 obtenido anteriormente.

En vista de estos resultados discordantes, solamente se puede decir que la carga está comprendida entre los valores:

$$h = \frac{0.331}{0.65^2} = 0.787 \text{ m.} \quad h_2 = \frac{0.331}{0.62^2} = 0.86 \text{ m.}$$

Si tomamos el término medio aritmético entre los dos valores del coeficiente de gasto obtenido, que tampoco es un resultado más exacto, hubiéramos hallado $h = 0.82$ m. En todo caso h es la diferencia entre el Bernoulli dentro del estanque y la vena contraída; para tener la altura de agua en el cilindro es necesario restar de h la altura de velocidad que vale ahí:

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{0.020}{0.0314} \right)^2 = 0.02 \text{ m.}$$

EJEMPLO N.º 2.—En un canal de forma rectangular de 2.5 m. de ancho hay una compuerta levantada 0.4 m. del fondo, formando un orificio en pared delgada de todo el ancho del canal, con supresión de la contracción en el fondo y en ambos lados. La altura del agua en el canal, inmediatamente aguas arriba de la compuerta, es de 1.30 m. y aguas abajo de ella, la vena contraída está descubierta. Se pide determinar el gasto que está escurriendo.

Como solamente hay contracción en el lado superior del orificio, el espesor h_t de la vena contraída guarda con la abertura a , de la compuerta, la razón que guarda la sección de la vena contraída con el área del orificio, es decir, que $\frac{h_t}{a} = \mu$.

El valor del coeficiente de contracción μ y el de gasto m , los obtendremos de la tabla de coeficientes experimentales de Boileau (pág. anterior). Para entrar en esa tabla necesitamos conocer la carga h , que, en nuestro caso requiere previamente el conocimiento de la magnitud de h_t , pues será la diferencia entre la profundidad de aguas arriba 1.30 m y h_t . Podríamos aceptar una magnitud h provisoria de 1 m.,

de modo que formaríamos la razón $\frac{a}{h} = \frac{0,4}{1,0} = 0,4$, que nos daría $m = 0,59$, $\mu = 0,58$. Así obtendríamos: $h_1 = 0,58 \times 0,4 = 0,23$ m; $h = 1,30 - 0,23 = 1,07$ m. Este valor de $h = 1,07$, no nos modifica ni el de m ni el de μ , que por tanto son definitivos. Según esto, el gasto es:

$$Q = 0,59 \times 0,4 \times 2,5 \sqrt{2g \times 1,07} = 2,7 \text{ m}^3/\text{s}$$

En realidad h , la carga es algo mayor que $1,30 - h_1$, pues hay que agregarle la altura de velocidad inicial. Basta corregir el gasto según la corrección que veremos más adelante (1). Llamando Q , el gasto aproximado encontrado, ω la sección del orificio y Ω la de aguas arriba (que aquí guardan la relación de las alturas), esa corrección nos da el gasto verdadero Q :

$$Q = Q_1 \sqrt{1 + \alpha m^2 \frac{\omega^2}{\Omega^2}} = 2,7 \sqrt{1 + 2 \times 0,59^2 \frac{0,4^2}{1,3^2}} = 2,78 \text{ m}^3/\text{s}$$

(Continuará)

(1) Párrafo 40, en este capítulo.