Consideraciones teóricas sobre un método de cálculo de una viga pórtico empotrada

POR H. E. S.

Teorema de Lagrange

El movimiento de un sistema material, cuyos puntos están sometidos a ligazones, puede determinarse cuando se conocen las fuerzas interiores y exteriores. La solución general de este problema es debida a Lagrange y se encuentra en todos los textos de Mecánica.

La conclusión desprendida de este raciocinio, en cuanto se refiere a los sistemas en equilibrio, que es lo que aquí nos interesa, es la siguiente:

La suma de los trabajos virtuales de las fuerzas exteriores e interiores es nula para todos los cambios de lugar de los puntos del sistema, compatibles con las ligazones.

Se llama trabajo virtual de un vector el producto del vector por un cambio de lugar elemental y por el coseno del ángulo que hace el vector con el cambio de lugar.

El trabajo virtual de un vector es una cantidad geométrica ideal, no real. El trabajo elemental de una fuerza es una cantidad no hipotética sino real.

Expresado en ecuación el teorema de los trabajos virtuales para el caso del equilibrio, toma la siguiente forma:

$$\Sigma\, \delta_{\tau}\, F + \Sigma\, \delta_{\tau}\, F_i = 0$$

Una manera sencilla de deducir esta ecuación para el caso particular del equilibrio, es la siguiente:

$$\Sigma\, \frac{1}{2}\, m\, v^2 = 0$$

ya que el sistema está en reposo, de donde:

$$d \Sigma \frac{1}{2} m v^2 = 0$$

Por otra parte, sabemos que si el sistema tiene cambios de lugar en un intervalo de tiempo dt debe verificarse:

$$d \Sigma \frac{1}{2} m v^2 = \Sigma d \tau F + \Sigma d \tau F_i$$

Luego:

$$\Sigma d \tau F + \Sigma d \tau F_i = 0$$

Esta demostración no es perfecta, porque se refiere a desplazamientos reales y no virtuales.

Forma de las ecuaciones que intervienen en los problemas de resistencia

En todas las ecuaciones de Resistencia de materiales sólo intervienen las fuerzas en forma lineal.

Supongamos un sistema material cualquiera sometido a ciertas fuerzas P que originan reacciones o tensiones estáticamente indeterminadas X, X', X'', etc.

Una reacción cualquiera R dependerá linealmente de las fuerzas F y de los valores de X, X', X'', etc. y se podrá por consiguiente escribir:

$$R = R_0 + R' X' + R'' X'' + \dots$$

en que R_0 representa una función lineal de las fuerzas P y R', R'', etc. coeficientes constantes independientes de los valores de P y de X.

Como las fatigas que sufre el material son también funciones lineales con respecto a las fuerzas que intervienen, puede también escribirse llamando σ una fatiga cualquiera:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma' X' + \sigma'' X'' + \dots$$

en que σ_0 es una función lineal de P y σ', σ'', etc., coeficientes independientes de los valores de P y de X.

Observaremos que R' R'' etc. son las derivadas parciales de R respecto de X', X'', etc. Esta misma observación es válida para los valores σ', σ'', etc.

Aplicación del teorema de Lagrange a la resistencia de materiales

Llamemos P las fuerzas que obran sobre un sistema material, R sus reacciones de apoyo, σ las fatigas que sufre el material, $\triangle$ p y $\triangle$ r los desplazamientos que experimentan los puntos de aplicación de P y de R cuando el material sufre la fatiga σ.

Según el teorema de Lagrange debe verificarse:

$$(1) \quad \Sigma\, \delta\, \tau\, P + \Sigma\, \delta\, \tau\, R + \Sigma\, \delta\, \tau\, \sigma = 0$$

En esta expresión tenemos que:

$$\delta\, \tau\, P = P \triangle p$$

$$\delta\, \tau\, R = R \triangle r$$

$$\Sigma\, \delta\, \tau = -\int \sigma \, du \triangle (ds) = -\int_v^o \sigma \frac{\triangle (ds)}{ds} \, dv$$

(si se desprecia la curvatura de la pieza en caso de tenerla).

Introduciendo estos valores en (1):

$$\Sigma\, P \triangle p + \Sigma\, R \triangle r = \int_v^o \sigma \frac{\triangle (ds)}{ds} \, dv$$

$\frac{\triangle (ds)}{ds}$ es el alargamiento específico de una fibra de largo (ds) correspondiente a los desplazamientos $\triangle$ p y $\triangle$ r y dV es el volumen elemental del sistema material considerado.

Si hacemos las derivadas parciales de esta ecuación con respecto a los valores X que figuraban en las ecuaciones de las reacciones de apoyo y de las fatigas, antes establecidas, obtendremos:

$$(2) \quad \Sigma \frac{\delta R}{\delta X} \triangle r = \int_v^o \frac{\delta \sigma}{\delta X} \frac{\triangle (ds)}{ds} \, dv$$

En efecto, P es evidentemente independiente de los valores X y $\triangle$ p, $\triangle$ r y $\triangle$ (ds) son, según el teorema de Lagrange, desplazamientos virtuales que deben cumplir con la única condición de ser compatibles con el sistema de ligazones o en términos ménos matemáticos, pero más claros, corresponderse, ser correlativos.

Como hicimos notar al final del párrafo anterior:

$$\frac{\delta R}{\delta X'} = R' \qquad \frac{\delta \sigma}{\delta X'} = \sigma'$$

$$\frac{\delta R}{\delta X''} = R'' \qquad \frac{\delta \sigma}{\delta X''} = \sigma''$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

Ahora bien, se deduce de la ley de Hooke:

$$\frac{\triangle (ds)}{ds} = \frac{\sigma}{E}$$

Por consiguiente, en el 2.º miembro de la ecuación (2) se hallan implícitamente las n incógnitas X', X'', X''', etc. que figuran en las ecuaciones:

$$(3) \quad \begin{cases} R = R_0 + R' X' + R'' X'' + \ldots \\ \sigma = \sigma_0 + \sigma' X' + \sigma'' X'' + \ldots \end{cases}$$

establecidas anteriormente.

En el 1.er miembro de la ecuación (2) figuran los coeficientes R', R'', R''' y el desplazamiento $\triangle$ r real de la reacción de que se trata. Este desplazamiento en la generalidad de los casos es conocido a priori; y los coeficientes R', R'', R''' etc. pueden determinarse por el método que expondremos en las líneas siguientes:

Si consideramos un sistema estáticamente indeterminado e hipotéticamente lo hacemos determinado (por ejemplo, si se tratara de una viga encastrada la supondríamos simplemente apoyada, si de un arco encastrado lo proveeríamos en un apoyo de una rótula y en el otro de un carro) y llamamos R_0 las reacciones de este sistema hipotético y σ_0 sus tensiones interiores, para obtener las verdaderas reacciones R y las verdaderas tensiones σ del sistema propuesto, será necesario averiguar los valores que toman en este caso los coeficientes R', R'' etc. y las reacciones indeterminadas X', X'' etc.

(Continuará)