

Determinación y relaciones recíprocas de las líneas de influencia en las vigas, según los métodos de Roberto Land

(Trabajo hecho en la Sección Obras Nuevas de los FF. CC. del E.—Chile)

(Conclusión)

La última propiedad mencionada es válida además para las líneas de influencia de puntos cualesquiera respecto a los cuales se tome momento, como lo manifiestan los teoremas 6 y 6 a. del capítulo siguiente.

Por medio de las líneas de influencia de $\overline{EM} = \frac{1}{h}$. EM se calculan inmediatamente las tensiones de la cabeza inferior. Así, por ejemplo: de la ecuación de momentos respecto a (2) calcularemos U_3 :

$$\frac{1}{h} (U_3 u_3) = \frac{1}{h} M_2 = \frac{1}{c} \Sigma_2 P \eta$$

De aquí:

$$U = \frac{h}{u_3 c} \Sigma_2 P \eta$$

En esta expresión las ordenadas η y el símbolo Σ_2 se refieren a la línea de influencia de $\frac{M_2}{h}$.

§ VIII. — Líneas de influencia del valor $\frac{M}{y} = \bar{M}$ para cualquier punto en arcos de dos o tres rótulas

a) LÍNEAS DE INFLUENCIA PARA EL CÁLCULO DE LAS TENSIONES EN LAS CABEZAS

Para el cálculo de la tensión de una cabeza se considera el momento respecto al nudo opuesto a ella.

El problema por resolver ahora consiste en determinar las relaciones recíprocas de los momentos en un cierto nudo (r) cuando una carga aislada P obra en dos nudos vecinos ($m - 1$) y (m) del arco enrejado con dos rótulas de apoyo: A y B que representa la Fig. 16.

Descompongamos la reacción del apoyo izquierdo, producida por una carga aislada P que obra en (m), en una fuerza vertical A_m y en una fuerza H'_m que obra en la dirección $A B$, dirección que forma el ángulo α con la horizontal. Si se designa por M_r^m el momento producido en (r) se tiene, según la Fig. 16:

$$M_r^m = A_m x_r - H'_m y'_r$$

y'_r es la distancia de (r) a $A B$.

Si además, se designan por $H_m = H'_m \cos \alpha$ la componente horizontal de H'_m y la ordenada vertical de (r) respecto a $A B$ por y_r , se tendrá:

$$H'_m y'_r = H'_m y_r \cos \alpha = H_m y_r$$

Por consiguiente:

$$M_r^m = A_m x_r - H_m y_r \quad \text{o también}$$

$$7) \dots \dots \dots H_m + \frac{M_r^m}{y_r} = A_m \frac{x_r}{y_r}$$

Si la carga aislada obra ahora en ($m - 1$) se deducirá de la misma manera para el nuevo momento M_r^{m-1} producido en (r):

$$7 a) \dots \dots \dots H_{m-1} + \frac{M_r^{m-1}}{y_r} = A_{m-1} \frac{x_r}{y_r}$$

A_m y A_{m-1} son, como se sabe, iguales a las reacciones verticales de apoyo de la viga correspondiente estáticamente determinada ($H = 0$). Estas reacciones quedan representadas por las ordenadas que se encuentran a plomo de la fuerza en un triángulo $A D B$ cuyo cateto \overline{AD} es igual a P .

Dividiendo la ecuación 7) por la 7 a) se obtiene la relación:

$$8) \dots \dots \dots \frac{H_m + \overline{M}_r^m}{H_{m-1} + \overline{M}_r^{m-1}} = \frac{A_m}{A_{m-1}} = \frac{x'_m}{x'_{m-1}}$$

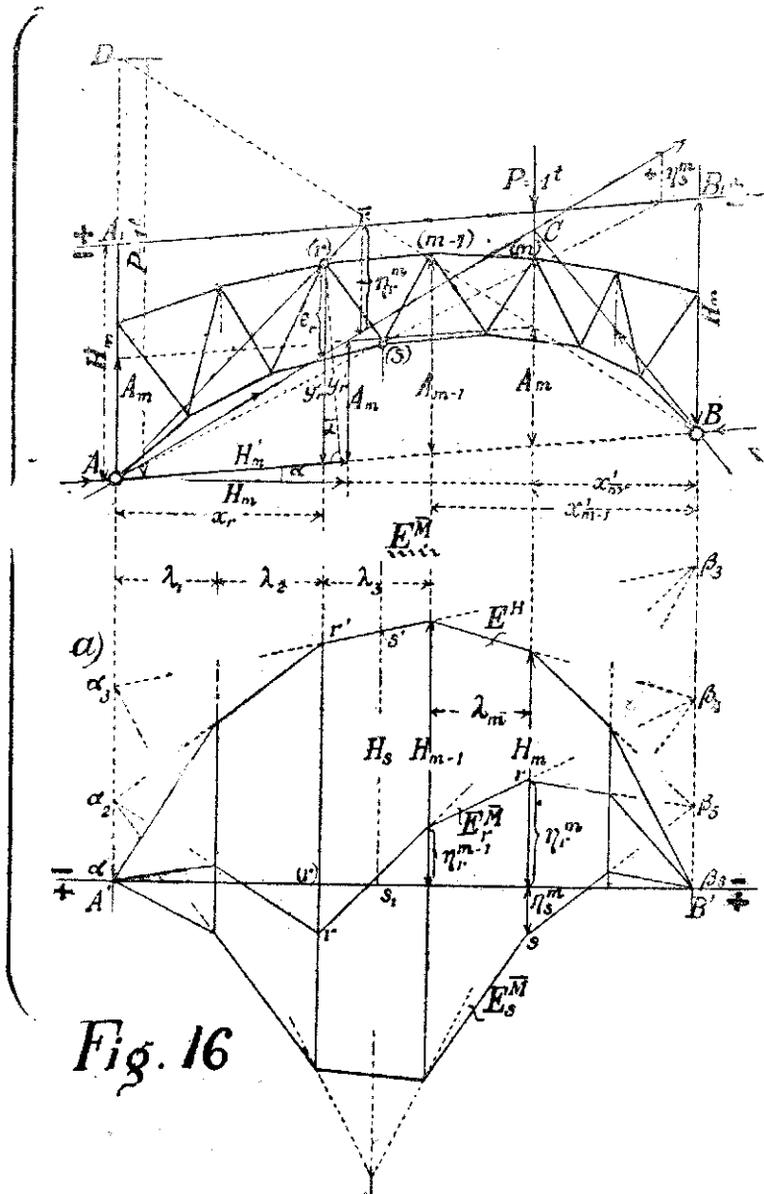


Fig. 16

Esta igualdad permite hacer una interpretación gráfica muy sencilla.

Si se traza la línea de influencia de $\bar{M}_r = \frac{M_r}{y_r}$ [designada en lo sucesivo para abreviar por $E_r^{\bar{M}}$] con referencia a un cierto eje A' B' [Fig. 16 a] y se traza también la línea de influencia E^H de H; pero ésta en el lado negativo (hacia arriba del eje), se ve claramente que las ordenadas en los puntos extremos del paño λ_m y comprendidas entre E^H y $E_r^{\bar{M}}$ representan a $H_m + \bar{M}_r^m$ y $H_{m-1} + \bar{M}_r^{m-1}$, ya sea \bar{M}_r positivo o negativo. En la Fig. 16 a) se ha supuesto que los momentos $\bar{M}_r^m = \eta_r^m$ y $\bar{M}_r^{m-1} = \eta_r^{m-1}$ son negativos.

De aquí se deduce que la ecuación 8) expresa la siguiente relación:

Los lados de las líneas de influencia E^H y $E_r^{\bar{M}}$, situados en un paño λ_m a la derecha de (r), se cortan en un punto β_m de la vertical trazada por el apoyo derecho B. Análogamente se obtiene la relación:

Los lados de las líneas de influencia ya citadas, situados en un paño λ_m a la izquierda de (r), se cortan en un punto α_m de la vertical trazada por el apoyo izquierdo A.

Como estas relaciones son aplicables, respectivamente a cada uno de los paños situados a la izquierda o a la derecha de (r), se pueden resumir en el siguiente teorema:

6.—La parte de la línea de influencia $E_r^{\bar{M}}$ perteneciente a un nudo cualquiera (r), que se encuentra a la $\left. \begin{array}{l} \text{izquierda} \\ \text{derecha} \end{array} \right\}$ de este nudo es afín con la parte correspondiente de E^H y el eje de afinidad es la vertical del apoyo $\left\{ \begin{array}{l} \text{izquierdo} \\ \text{derecho} \end{array} \right\}$ sobre el cual se encuentran los puntos de intersección $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\}$ de los lados análogos de las líneas de influencia antedichas. *

Según esto, basta encontrar un solo punto de $E_r^{\bar{M}}$ [es decir, conocer el valor $\frac{M_r}{y_r}$ para una sola posición de la carga aislada P, por ej.: en (m)] para completar inmediatamente toda la línea de influencia mencionada con ayuda de E^H .

* Esta relación puede deducirse también siguiendo un procedimiento análogo al empleado en b) capítulo VII-Fig. 15 y Fig. 15 a).

El paso a la izquierda de las figuras afines que se encuentran a la derecha de (r) o vice-versa, se determina fijando el punto r' de E^H correspondiente al nudo (r); pues r' pertenece a ambas figuras.

Determinación de un valor de $\overline{M}_r = \frac{M_r}{y_r}$.

El valor $\frac{M_r^m}{y_r}$ que se produce cuando P obra en (m) se puede determinar gráficamente de una manera muy sencilla.

Por medio de H_m y A_m se determinan, siguiendo el método corriente, las direcciones de las reacciones en A y B, las cuales se cortan en un punto C de P (polígono funicular A B C).

Si a la distancia vertical e_r entre (r) y la dirección de la reacción de apoyo correspondiente A C, se le coloca signo positivo o negativo según esté dirigida hacia arriba o hacia abajo del punto de momento (r), se tiene la sencilla relación que incluye el signo:

$$M_r^m = H_m \cdot e_r$$

(Esta ecuación se deduce inmediatamente descomponiendo la reacción de apoyo donde se corta con y_r en una fuerza vertical y en la fuerza horizontal H_m).

El valor buscado $\frac{M_r^m}{y_r} = H_m \frac{e_r}{y_r} = \eta_r^m$ se puede determinar fácilmente como longitud. Se traza la paralela $A_1 B_1$ a A B, siendo la distancia vertical entre ambas rectas igual a H_m . La recta A (r) corta a $A_1 B_1$ en un punto \overline{r} cuya distancia vertical a la línea de fuerza A C es igual a η_r^m , pues en los triángulos se verifica $H_m : \eta_r^m = y_r : e_r$. El signo de η_r^m se fija en la misma forma que para e_r , es decir, se toma positivo o negativo según que η_r^m quede encima o debajo de $A_1 B_1$.

De esta manera se puede determinar gráficamente con mucha facilidad el valor $\frac{M^m}{y} = \eta^m$, para un punto de momento cualquiera, estando la carga P en una posición fija (m).

[En la Fig. 16 se ha determinado para los puntos (r) y (s)].

Una vez determinados los valores η^m se aplican como ordenadas en la vertical de (m) a partir del eje de referencia A' B' (Fig. 16 a), teniendo cuidado del signo. Además, con ayuda del teorema 6, se pueden trazar inmediatamente todas las líneas de influencia $\overline{E^M}$.

El teorema 6, también es aplicable para un nudo (s) de la cabeza no cargada.

Esto se evidencia fácilmente haciendo las mismas consideraciones anteriores. Se colocó la carga aislada sobre (s) y en seguida sobre un nudo vecino del paño cargado $\lambda_s (= \lambda_3)$, [ambos puntos corresponden a los anteriores (m) y (m - 1)].

El punto s' de E^H situado a plomo de (s) es el punto intermediario de las figuras afines que se encuentran a la izquierda y a la derecha de él. Por último, la punta de E_s^M que se forma debajo de λ_s es cortada en línea recta porque (s) ya no es un nudo directamente cargado.

Ejemplos

1) Arco con tres rótulas A, B, C.

Como en las consideraciones sólo se ha impuesto la condición que las reacciones de apoyo pasen por las rótulas A y B, también valen las conclusiones para un arco enrejado de tres rótulas.

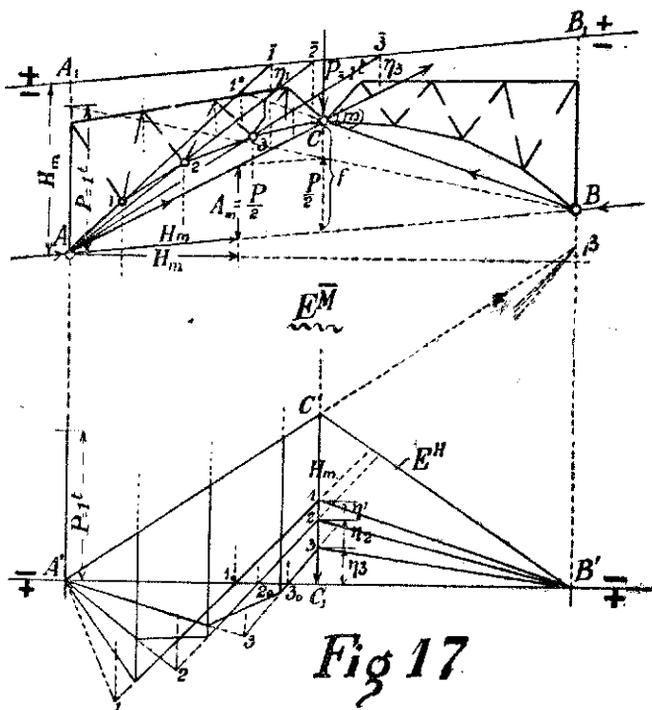
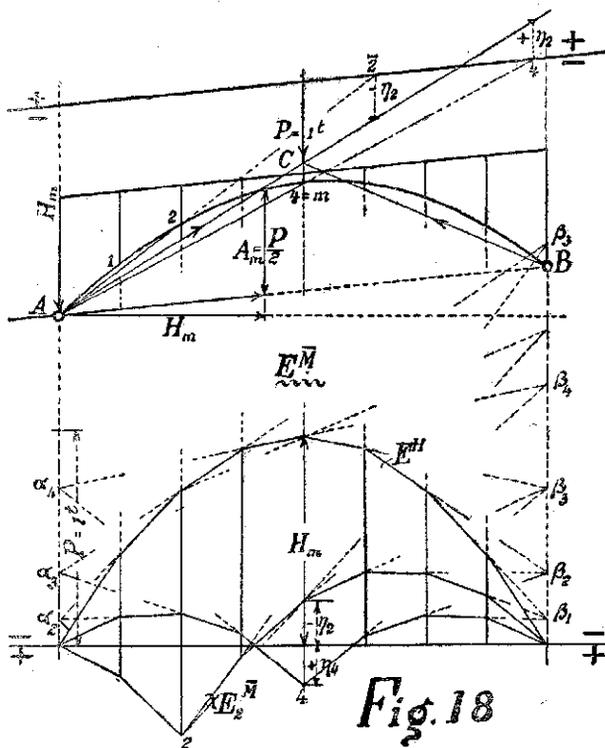


Fig 17



b) LÍNEAS DE INFLUENCIA DEL VALOR $\frac{M}{y} = \overline{M}$ PARA EL CÁLCULO DE LAS BARRAS DE CELOSÍA

Si para el cálculo de la tensión S_r de una barra de celosía se imagina la viga cortada en el paño respectivo según la sección $r - r$, se considerará el momento M_r de todas las fuerzas que obran a la izquierda de la sección, tomado respecto al punto de intersección R de las barras de cabeza cortadas, Fig. 19.

Según esto, si obra una fuerza $P_{(m)} = 1t$ a la derecha de la sección cortada y x_r, y_r tienen respecto a R el mismo significado que antes respecto al punto de momento (r) , subsisten siempre la ecuación 8) y todas las conclusiones deducidas de ella para las líneas de influencia del valor $\frac{M}{y}$.

Lo que ha cambiado es el punto de separación de los dos pares de figuras afines que ya no quedará determinado por el punto de momento R , si no que por la situación del corte $r - r$ de la barra de celosía.

Por consiguiente, en lugar del teorema 6 tendremos aquí la relación siguiente:

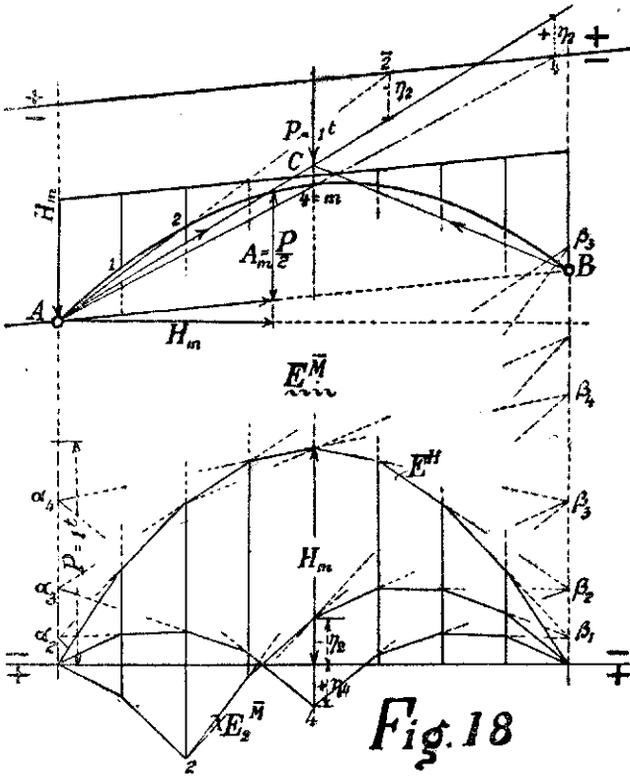


Fig. 18

b) LÍNEAS DE INFLUENCIA DEL VALOR $\frac{M}{y} = \bar{M}$ PARA EL CALCULO DE LAS BARRAS DE CELOSÍA

Si para el cálculo de la tensión S_r de una barra de celosía se imagina la viga cortada en el paño respectivo según la sección $r - r$, se considerará el momento M_r de todas las fuerzas que obran a la izquierda de la sección, tomado respecto al punto de intersección R de las barras de cabeza cortadas, Fig. 19.

Según esto, si obra una fuerza $P_{(m)} = 1^t$ a la derecha de la sección cortada y x_r, y_r tienen respecto a R el mismo significado que antes respecto al punto de momento (r) , subsisten siempre la ecuación 8) y todas las conclusiones deducidas de ella para las líneas de influencia del valor $\frac{M}{y}$.

Lo que ha cambiado es el punto de separación de los dos pares de figuras afines que ya no quedará determinado por el punto de momento R , si no que por la situación del corte $r - r$ de la barra de celosía.

Por consiguiente, en lugar del teorema 6 tendremos aquí la relación siguiente:

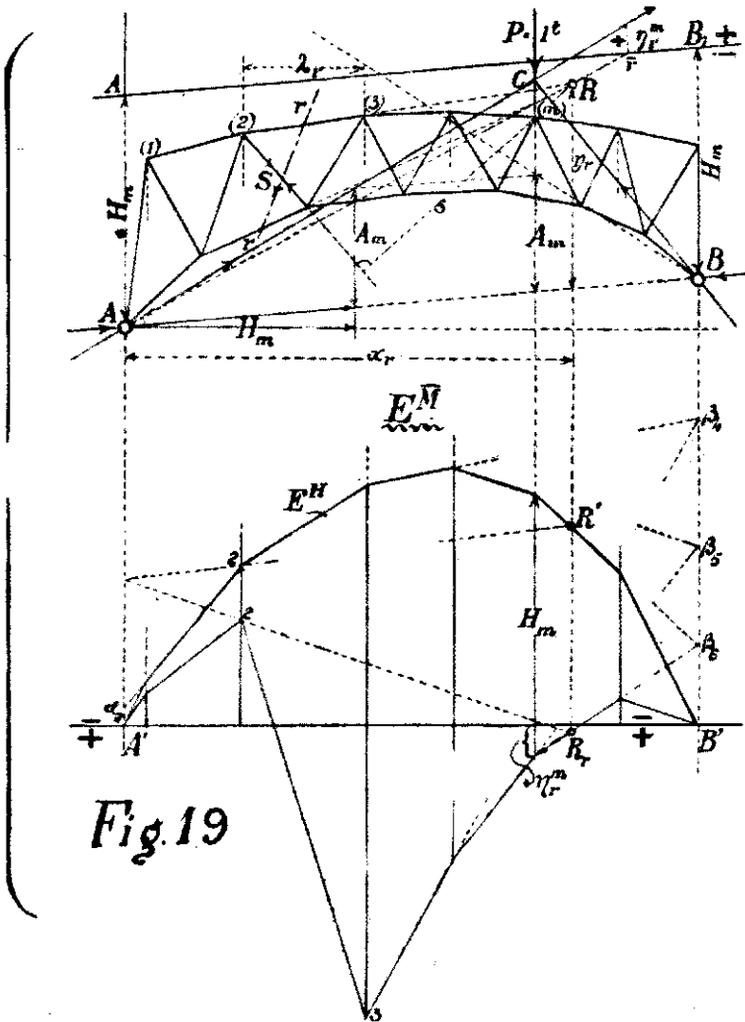


Fig. 19

6 a.—Tratándose del cálculo de una barra de celosía S_r , la parte de la línea de influencia E_r^M que se encuentra a la $\left\{ \begin{array}{l} \text{izquierda} \\ \text{derecha} \end{array} \right\}$ del lugar de la sección $r-r$ es afín con la parte correspondiente de EH y el eje de afinidad es la vertical que pasa por el apoyo de la $\left\{ \begin{array}{l} \text{izquierda} \\ \text{derecha} \end{array} \right\}$.

La correspondencia que existe entre ambos pares de figuras afines se verifica aquí mediante el punto de momento R que puede considerarse como perteneciente a las dos partes de la viga separadas por la sección $r-r$, análogamente a lo que ocurre con el nudo (r) en el caso a).

El punto R' de E^H , a plomo de R , es pues, el punto intermediario entre las figuras afines de la izquierda y aquellas de la derecha.

Si se determina, por ejemplo, el valor η_r^m , se aplica a plomo de (m) y con ayuda de los puntos β se dibuja la parte $B'3$ de E_r^M , el extremo 2 de la ordenada izquierda del paño λ_r se encuentra en la intersección de la recta $R_r 2$, afin de la recta $R'2'$ de E^H , con la ordenada susodicha. Así queda también determinada la parte izquierda de E_r^M con ayuda de los puntos α .

Nos parece superfluo dar más ejemplos sobre este procedimiento general.

e) TENSIONES DE LAS BARRAS DEDUCIDAS DE LAS LÍNEAS
DE INFLUENCIA E_r^M DE $\frac{M}{y}$.

Sean O, U, S , las tensiones de una barra de la cabeza superior, de una de la cabeza inferior y de una barra de celosía.

Sean o, u, s , los brazos de palanca respecto al punto de momento, respectivo y sean η_r en general, las ordenadas de las líneas de influencia de $\frac{M}{y}$, respectivas.

Las tensiones que sufren esas barras se deducirán de la relación general: el momento de tensión es igual al momento estático:

$$O \cdot o = - M \quad o \quad \frac{O \cdot o}{y} = - \frac{M}{y}$$

$$O = - \frac{y}{o} \Sigma \frac{M}{y} = - \frac{y}{o} \Sigma P \eta$$

$$U \cdot u = + M \quad o \quad \frac{U \cdot u}{y} = + \frac{M}{y}$$

$$U = + \frac{y}{u} \Sigma \frac{M}{y} = + \frac{y}{u} \Sigma P \eta$$

$$S \cdot s = \pm M \quad o \quad \frac{S \cdot s}{y} = \pm \frac{M}{y}$$

$$S = \pm \frac{y}{s} \Sigma \frac{M}{y} = \pm \frac{y}{s} \Sigma P \eta$$

En la última ecuación vale el signo — cuando el momento de tensión S obra en el sentido de la marcha de los punteros del reloj respecto al punto de momento y el signo + en el caso contrario, suponiendo que la fuerza S aplicada a la parte izquierda de la viga sea una fuerza de tracción.

Santiago, 12 de Noviembre de 1919.
