# Determinacion de la precision de una nivelacion

POR

FRANCISCO CERECEDA

---

Se dice corrientemente que una nivelacion tiene una precision de *m* cms por km cuando la diferencia entre la nivelacion de ida i la de vuelta es de *m* cms en el primer kilómetro, de *2 m* en el segundo, i así sucesivamente.

Dos errores graves envuelve esta apreciacion:

1). *La diferencia de las dos nivelaciones* (tolerancia o error de cierre) *no puede constituir una medida de precision.*

Para evidenciarlo, basta suponer el siguiente caso teórico:

Una línea de 1 km de largo i dividida en 10 trozos iguales se ha nivelado en los dos sentidos. La discrepancia de las dos nivelaciones en el primer trozo sea: + 1 cm ; en el segundo: — 1 cm, en el tercero: + 1 cm, i así sucesivamente. La discrepancia final será 0; pero es evidente que la precision de la nivelacion estará léjos de corresponder a este valor.

Esta observacion es de un carácter jeneral. Por ejemplo, si una base de triangulacion, de $2\frac{1}{2}$ kms de largo, se ha medido dos veces, con huincha de 50 m; i se encuentra que la discrepancia final de las dos medidas es de $\frac{1}{2}$ m/m, no se puede deducir de aquí que la precision del medio aritmético sea : 1 en 10 millones ($\frac{1}{4}$ m/m en 2 500 m.) Lo lójico es deducir el error del medio aritmético, tomando como base toda la série de 50 errores intermedios, provenientes de las diferencias entre huinchada i huinchada.

La verdadera *medida de precision* de una operacion cualquiera de mensura está constituida por el error medio cuadrático (Alemania, Francia) o por el error probable (Estados Unidos), que es igual a los 0.67 del primero.

El error medio cuadrático de *una* observacion está definido por la siguiente fórmula:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$$

en que : $[v^2]$ = suma de los cuadrados de los errores aparentes, o sea, suma de los cuadrados de las diferencias entre el medio aritmético i las diversas observaciones.

n = número de observaciones.

El error medio cuadrático M del *medio aritmético* de una série de observaciones se define así:

$$M = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}$$

En el caso especial de dos observaciones iguales,

$$M = \pm \sqrt{\frac{v^2 + v^2}{2}} = \pm v$$

es decir, el error medio cuadrático del medio aritmético es la mitad de la diferencia de las dos observaciones.

Volviendo al caso teórico ya citado, en que la diferencia de las nivelaciones en cada trozo era de 1 cm, diremos que el error medio cuadrático del promedio de ámbas es de : 0,5 cm. Ahora, como se trata de 10 errores iguales, el error del promedio de las nivelaciones de la línea total, de 1 km será la suma de esos 10 errores, o sea:

$$\pm 0{,}5 \sqrt{10} = \pm 1{,}6 \text{ cms}$$

La nivelacion que cerraba con 0 cms en 1 km tiene, pues, un error medio cuadrático de $\pm$ 1,6 cms.

I en el caso de la base de triangulacion ya citado, si se supone que la discrepancia entre cada dos huinchadas homólogas sea de 1,5 m/m. el error del promedio de ámbas medidas, será:

$$M = \pm \frac{1{,}5}{2} \sqrt{50} = \pm 5 \text{ m/m}$$

o sea 1 en 500 000; tocaria los deslindes de la precision de las bases jeodésicas.

Para definir de un modo racional la precision de una nivelacion debe sustituirse, en consecuencia, la discrepancia o error de cierre por el error medio cuadrático o el error probable.

2). Supongamos una línea de largo *L*, dividida en *n* visuales de largo *s* (es decir habrá $\frac{n}{2}$ estaciones de nivel).

Llamemos $\pm \mu$ el error medio cuadrático de cada visual. El error total $\Delta H$ de la diferencia de nivel H será: $\Delta H = \pm \mu \pm \mu \pm \mu \ldots \pm \mu$.

El error medio cuadrático de la diferencia de nivel, será, de acuerdo con la lei de propagacion de los errores:

$$M = \sqrt{\mu^2 + \mu^2 + \mu^2 \ldots \mu^2} = \mu \sqrt{n}$$

i como $n = \frac{L}{s}$

$$M = \sqrt{\frac{L}{s} \mu^2}$$

Esta ecuacion es la lei fundamental de la teoria de los errores de nivelacion i puede enunciarse así: «Para un mismo instrumento i unas mismas condiciones de trabajo, i un largo de visual constante, el error medio cuadrático de la nivelacion crece con la raiz cuadrada del trozo nivelado. (Jordan. Hdbch. der Vermessungskunde, tomo II, páj. 529. 1908).

El error de nivelacion debe variar, pues, con la raiz cuadrada de la distancia, i no proporcionalmente a ella.

Así Wilson (Topographic Surveying, páj. 345 ed. 1908) dice, p. ej., que en nivelaciones de precision, el error probable no debe exceder de 5 m/m $\times \sqrt{\text{distancia en kms.}}$ El U. S. Coast and Geódetic Survey exije una precision de 0,02 piés $\times \sqrt{\text{distancia en millas}}$, o sea 4,7 m/m $\sqrt{\text{distancia en kms.}}$ La British Ordnance Survey cree alcanzar un alto grado de precision, exijiendo un máximo error constante de 0,01 pié por milla, o sea 1.9 m/m por km; i, sin embargo, este mismo límite aplicado a una nivelacion bastante larga, se alcanza mucho mas fácilmente que los límites fijados por las Organizaciones Americanas. El U. S. Geological Survey ha fijado como límite de precision en nivelaciones de precision el mismo del U. S. C. and G. S.

En Alemania se tienen las siguientes normas (Hütte: Des Ingenieurs Taschenbuch, tomo III, páj. 33, ed. 1909):

Si se designa por *m* «el error medio cuadrático de 1 km de *una* de las nivelaciones», el error medio cuadrático de una seccion de L kms, en m/m, es:

$$M = \pm m \sqrt{L}$$

Para nivelaciones de proyectos técnicos, se acepta:

$m \leqq 27$ m/ms segun el Reglamento de Agrimensores.

$m \leqq 20$ m/ms, segun las prescripciones de la Administracion de Ferrocarriles.

Según las Instrucciones del Levantamiento de Prusia,

$$M \leqq \pm 9 \text{ m/ms} \sqrt{\frac{L}{100}}$$

estando espresado L en metros; lo que da para 1 km:

$$m \overline{\underset{<}{=}} 28 \text{ m/ms}$$

En nivelaciones de precision se estrechan mas los límites del error, llegando a aceptarse $m = \pm 1$ m/m i aun menos.

Conociendo el error de una de las nivelaciones, es fácil determinar el error medio cuadrático del medio aritmético de ambas, dividiendo el primero por $\sqrt{2}$.

En cuanto a la manera de determinar la precision de una nivelacion, Jordan indica el siguiente método (op. cit. páj. 530):

Si se ha dividido una línea en una série de trozos (que no necesitan ser iguales), i se ha nivelado cada trozo en los dos sentidos, la série de diferencias producidas entre las dos nivelaciones de todos los trozos, proporciona una base para la determinacion de la precision de la nivelacion.

Supongamos que:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| el | trozo | $s_1$ | de | una | diferencia | $h_1 - h_1{}^1 = d_1$ |
| » | » | $s_2$ | » | » | » | $h_2 - h_2{}^1 = d_2$ |
| » | » | » | » | » | » | » » » |
| » | » | » | » | » | » | » » » |
| » | » | $s_n$ | » | » | » | $h_n - h_n{}^1 = d_n$ |

El error medio cuadrático de 1 km de una de las nivelaciones, es:

$$m = \sqrt{\frac{1}{2\,n}\left[\frac{d^2}{s}\right]}$$

significando el paréntesis $\left[\frac{d_1{}^2}{s_1} + \frac{d_2{}^2}{s_2} + \frac{d_3{}^2}{s_3} \cdots \frac{d_n{}^2}{s_n}\right]$

i el error medio cuadrático de 1 km del medio aritmético de las dos nivelaciones:

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d^2}{s}\right]}$$

Si se miden los diferentes trozos en km i las diferencias en m/ms las fórmulas darán valores en m/ms por km.

Jordan ha confeccionado una tabla (apéndice páj. 9, tomo II) para los valores de $\sqrt{s}$ i $\frac{d}{\sqrt{s}}$. Lo demas lo da la regla de cálculo.

F. CERECEDA.