NOTA SOBRE LA APLICACION

DE LA FÓRMULA MONOMIO DE DARCY PARA EL CÁLCULO DE LOS CONDUCTOS DE AGUAS BAJO PRESION

Cuando un injeniero hidráulico se encuentra en presencia de un estudio de distribucion de agua bajo presion, una vez que esté definitivamente establecido sobre el plano el trazado de sus canalizaciones de todo órden, calcula, con arreglo a la cantidad de agua diaria de que dispone, el gasto que deberá poder asegurar la red a las horas del mayor consumo diurno.

Hecho esto, determina el diámetro de las canalizaciones haciendo uso, sea de abacos, sea de tablas conocidas, con cuya ayuda llega a determinar por tanteos el diámetro de los conductos en funcion de su gasto.

Estas tablas toman en cuenta las pérdidas de carga debidas a la resistencia del agua en los tubos.

La fórmula de Darcy está basada sobre el principio de que «la resistencia al movimiento del agua en un conducto puede ser considerada como proporcional al cuadrado de la velocidad, e inversamente proporcional al radio del conducto».

Designando por:

D. el Diámetro del conducto.

V. la velocidad media de réjimen.

J. la pendiente por metro del conducto o la pérdida de carga.

b_1. un coeficiente variable segun el diámetro.

(Para los tubos en servicio este coeficiente es $b_1 = 0{,}000\,507 + \dfrac{0{,}00001294}{D}$)

Q. el gasto del conducto.

Darcy establece:

$$J = \frac{b_1 V^2 r}{D} \qquad (1)$$

$$D = \frac{b_1 V^2 r}{J} \qquad (2)$$

$$V = \sqrt{\frac{D\ J}{2\ b_1}} \tag{3}$$

Pero $Q = \frac{\pi\ D^2}{4} V$ (4)

de donde $V = \frac{4\ Q}{\pi\ D^2} = 1{,}237 \frac{Q}{D^2}$ (5)

Reemplacemos en la ecuacion 4), el valor que tiene *V* en la ecuacion 3).

Se tiene:

$$Q = \frac{\pi\ D^2}{4} \sqrt{\frac{D\ J}{2\ b_1}} \tag{6}$$

$$Q = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{J\ D^5}{2\ b_1}} \tag{7}$$

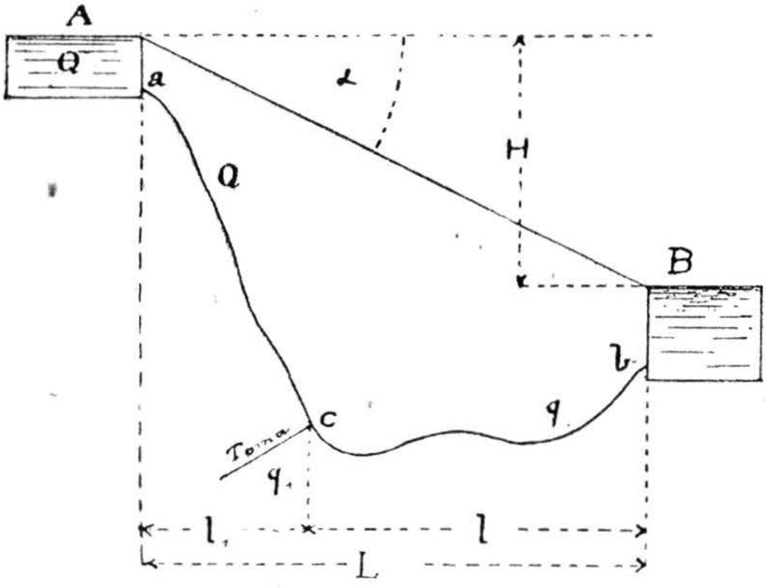
$$Q^2 = \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{J\ D^5}{r\ b_1} \tag{8}$$

$$D = \sqrt[5]{\frac{16\ Q^2\ r\ b_1}{\pi^2\ J}} = \sqrt[5]{\frac{32\ Q^2\ b_1}{\pi^2\ J}} \tag{9}$$

$$i\ J = \frac{16\ Q^2\ 2\ b_1}{\pi^2\ D^5} = \frac{32\ Q^2\ b_1}{\pi^2\ D^5} = \frac{32\ Q^2\ b_1}{\pi^2\ 32\ R^5} = \frac{Q^2\ b_1}{\pi^2 R^5} \tag{10}$$

Nos proponemos desarrollar, mas abajo, una fórmula que permita determinar el gasto de un conducto, en funcion del radio, para un caso particular.

Fig. 1.—Supongamos un estanque *B* ligado a una fuente *A*, situada a una distancia *L*, por un conducto de radio constante *r*, sobre el cual se ha practicado una débil toma. Siendo conocido el gasto *Q'* que puede producir la fuente, superior al gasto necesario, i siendo conocidos igualmente el gasto de la toma, lo mismo que la diferencia *H* entre el nivel del agua en el estanque i en la fuente, se trata de determinar el diámetro del conducto.



Sea dado: Q — el gasto en el trozo a. c.

q — » » » c. b.

q_1 — » de la toma.

H — la pérdida de carga total disponible.

y — » » en el trozo a. c.

y_1 — » » » » c. b.

l_1 i l la lonjitud de cada trozo.

r — el radio constante del conducto.

Línea de carga.—La línea de carga estará representada por la recta *A B* que liga los niveles de los planos de agua de la fuente i del estanque. En realidad la carga *H* será absorbida:

1.° Por la pérdida de carga a la entrada del tubo.

2.° Por el establecimiento de la velocidad de réjimen.

3.° Por los frotamientos contra las paredes del tubo.

4.° Por las pérdidas de carga resultantes de diversos codos.

Adoptando la recta *A B* como línea de carga tenemos: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{L}$; pero es evidente que esta recta supone abierto los orificios de entrada i de salida i que no exista ninguna toma en el trayecto. Como consecuencia de la presencia de la toma en el curso de la ruta, esta línea se flexionará porque encontrando el agua una nueva salida, la resistencia de frotamiento en el trozo comprendido entre el desvío i el estanque será disminuido, ya que el gasto lo será tambien; pero hemos admitido que el gasto de las fuentes era superior al necesario, luego, no variando la carga sobre los dos orificios estremos, resultará disponible una carga mas grande entre la fuente i la toma, i el consumo en el trozo superior se encontrará aumentado de tal modo que la resistencia del frotamiento que se desarrollará en este trozo con el nuevo gasto, unida a la resistencia en el trozo inferior (por un gasto reducido) será todavía igual a la carga total disponible.

Se ve, pues, que la abertura de la toma no determinará en el conducto principal sino una disminucion igual a su gasto, disminuido del aumento de gasto en el trozo superior; i desde el punto de vista de la línea de carga, no tendrá otro efecto que disminuir la presion a la salida de la toma i transformar la recta de carga en una línea quebrada.

Para simplificar esta cuestion que no entra en el cuadro de la presente nota, admitiremos, pues, que la distancia L i el gasto de la toma son tales, que las pérdidas de carga resultantes de la entrada del agua en el tubo, del establecimiento de la velocidad de réjimen, de los cambios de direccion i de la toma, son mui débiles relativamente a los creados por el frotamiento.

Determinacion del radio.—La ecuacion de continuidad da:

$$Q=q+q_1 \qquad (1)$$

i la espresion de la pérdida de carga en cada trozo del conducto principal está dada, empleando la fórmula monomio de Darcy, recordada mas abajo, por las ecuaciones:

$$y=\frac{Q^2 b_1}{\pi^2 r^5} b_1 \qquad (2)$$

$$y_1=\frac{q^2 b_1}{\pi^2 r^5} l \qquad (3)$$

Sumando *2)* i *3)* se tiene:

$$y+y_1=\frac{Q^2 b_1}{\pi^2 r^5} l_1+\frac{q^2 b_1}{\pi^2 r^5} l \qquad (4)$$

Pero $y+y_1=H$

de donde

$$H=\frac{b_1}{\pi^2 r^5}(Q^2\ l_1+q^2\ l) \qquad (5)$$

Pero $Q=q+q_1$

$$\text{de donde } Q^2=(q+q_1)^2=q^2+q_1{}^2+2\,q\,q_1 \qquad (6)$$

Remplazando en la igualdad *5)* Q^2 por su valor encontrado en la ecuacion *6)*, se tiene:

$$H=\frac{b_1}{\pi^2 r^5}(q^2+q_1{}^2+2\,q\,q_1)\,l_1+q^2\,l \qquad (7)$$

$$H=\frac{b_1}{\pi^2 r^5}(q^2 l_1+q_1{}^2\,l_1+2\,q\,q_1\,l_1+q^2\,l) \qquad (8)$$

$$H=\frac{b_1}{\pi^2 r^5}\left[q^2\,(l_1\,+l)+q_1{}^2\,l_1+2\,q\,q_1\,l_1)\right] \qquad (9)$$

Pero $l_1+l=L$

de donde:

$$H=\frac{b_1}{\pi^2 r^5}(q^2\,L+q_1{}^2\,l_1+2\,q\,q_1\,l_1) \qquad (10)$$

$$\frac{H\pi^2 r^5}{b_1}=q^2\,L+q_1{}^2\,l_1+2\,q\,q_1\,l_1 \qquad (11)$$

$$q^2\,L+q_1{}^2\,l_1+2\,q\,q_1\,l_1-\frac{H\pi^2 r^5}{b_1}=0 \qquad (12)$$

nos encontramos, pues, en presencia de una ecuacion de segundo grado de tres términos, de la forma:

$$a\,x^2+b\,x-c=0$$

Los tres términos son:

$$(q^2L)+(2\,q\,q_1\,l_1)+\left(q_1{}^2\,l_1-\frac{H\pi^2 r^5}{b_1}\right)=0 \qquad (13)$$

$$(q^2L)+(2\,q_1\,l_1\,q)+\left(q_1{}^2\,l_1-\frac{H\pi^2 r^5}{b}\right)=0 \ (14)$$

$$q^2 + \left(\frac{2\ q_1\ l_1}{L} q\right) + \left(\frac{q_1{}^2\ l^1 - \frac{H\pi^2 r^5}{b_1}}{L}\right) = 0 \qquad (15)$$

$$\text{Hagamos } \frac{2\ q_1\ l_1}{L} = m \qquad (16)$$

$$\left(q^2 + m\ q + \frac{m^2}{4}\right) + \left(\frac{q_1{}^2\ l_1 - \frac{H\pi^2 r^5}{b_1}}{L}\right) = 0 + \frac{m^2}{4} \qquad (17)$$

$$\left(q + \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{\frac{H\pi^2 r^5}{b_1} - q_1{}^2\ l_1}{L} \qquad (18)$$

$$\text{Sea q o } Q = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{\frac{H\pi^2 r^5}{b_1} - q_1{}^2\ l^1}{L}} \qquad (19)$$

Reemplazando m por su valor de la igualdad *16)*:

$$q = \frac{-2\ q_1\ l_1}{2\ L} \pm \sqrt{\left(\frac{2\ q_1\ l_1}{2\ L}\right)^2 + \frac{\frac{H\pi^2 r^5}{b_1} - q_1{}^2\ l_1}{L}} \qquad (20)$$

$$q = \frac{-2\ q_1\ l_1}{2\ L} \pm \sqrt{\frac{4\ q_1{}^2\ l_1{}^2}{4\ L^2} + \frac{\frac{H\pi^2 r^5}{b_1} - q_1{}^2\ l_1}{L}} \qquad (21)$$

$$q = \frac{-2\ q_1\ l_1}{2\ L} \pm \sqrt{\frac{4\ q_1{}^2\ l_1{}^2\ L}{4\ L^3} + \frac{4\ L\left(\frac{\pi^2 r^5 H}{b_1} - q_1{}^2\ l_1\right)}{4\ L^3}} \qquad (22)$$

$$q = \frac{-2\ q_1\ l_1}{2\ L} \pm \sqrt{\frac{4\ q_1{}^2\ l_1{}^2}{4\ L^2} + \frac{4L\left(\frac{\pi^2 r^5\ H}{b} - q_1{}^2 l_1\right)}{4\ L^2}} \qquad (23)$$

$$q = \frac{-2\ q_1\ l_1 \pm \sqrt{4\ q_1{}^2\ l_1{}^2 + 4\ L\ \frac{H\pi^2 r^5}{b_1} - 4\ L\ q_1{}^2\ l_1}}{2\ L} \qquad (24)$$

$$\text{Sea q o } Q = \frac{-2\, q_1\, l_1 \pm \sqrt{4\, q_1^{\,2}\, l_1^{\,2} - 4\, L\left(q_1^{\,2}\, l_1 - \dfrac{H \pi^2 r^5}{b_1}\right)}}{2\, L} \qquad (25)$$

Así dispuesta, esta fórmula dará los valores de Q si se conoce r. Se puede, pues darse r i verificar si este radio da el gasto deseado que es menor que Q segun enunciado.

Supongamos:

$$Q' = 28 \text{ litros por segundo}$$

$$q_1 = \text{m. } 1{,}1 \text{ l—d}^o$$

$$H = \text{m. } 8{,}77$$

$$l_1 = \text{m. } 2440$$

$$l = 4530\text{—d}^o$$

i que se desee captar un gasto comprendido entre 15 i 20 litros por segundo.

Se deduce de la fórmula:

$$\text{para } r = \text{m. } 0{,}125, \; Q = 18 \text{ l}$$

P. WÉRY.

Santiago, Agosto 26 de 1904.