DETERMINACION DE LA FLECHA

EN LAS VIGAS ENREJADAS

(MÉTODO DE KOECHLIN)

Las deformaciones en una viga enrejada provienen de dos causas: deformacion de las cabezas i deformacion de las diagonales. Las examinaremos separadamente.

Supondremos que el sistema es articulado, es decir, prescindimos de los esfuerzos secundarios provocados por la rijidez de los ensambles; esfuerzos que tienen poca influencia sobre las deformaciones de conjunto.

A).—DEFORMACION DE LAS CABEZAS (FIG. 1)

Consideremos un paño de la viga, i sea:

h = altura de la viga medida entre los centros de gravedad de las cabezas.

a = el largo de un paño.

R = coeficiente de trabajo de la cabeza en el paño considerado.

E = coeficiente de elasticidad del material medido en las mismas unidades que R i r.

La deformacion de las cabezas consiste en que la cabeza superior comprimida se acortará i la inferior tendida se alargará de la misma cantidad, suponiendo que los coeficientes de elasticidad del material por traccion i compresion sean iguales. Esta deformacion produce una rotacion en los montantes, de cierto ángulo ϕ, que trataremos de avaluar.

Segun la lei de Hooke, la deformacion o dilatacion δ por unidad de lonjitud, en la cabeza inferior, será:

$$1): \delta = \frac{\tau}{E}$$

Siendo τ la tension elástica de dicha cabeza, lo que nos da un alargamiento total:

$$2): m\,n = \frac{R_2 \times a}{2 \times E}$$

siendo R_2, la tasa práctica de trabajo de la cabeza a plomo del montante 2.

Ahora, para avaluar el ángulo ϕ, tomaremos la tanjente, dado el pequeño valor de ϕ, i tendremos:

$$3): tang.\, \phi_1 = \phi_1 = \frac{R \times a}{E \times h}$$

La rotacion de la fibra media BC del 2.° paño, suponiendo AB fijo, puede espresarse por:

$$4): \ \phi_1 + \phi_2 = \frac{R_2 \times a}{E \times h} + \frac{R_3 \times a}{E \times h} = \frac{a}{E \times h}(R_2 + R_3)$$

El desplazamiento vertical de un punto O invariablemente ligado a la viga, será:

$$\text{(fig. 1)}\ oo' = x_1 \times tang.(\phi_1 + \phi_2) = x_1 \times \frac{a}{E \times h}(R_2 + R_3)$$

i la flecha total será la suma de todos estos desplazamientos.

Construccion gráfica (fig. 3)

Para obtener la fibra media deformada nos bastará tomar sobre una vertical, como fuerzas, las tasas de trabajo sucesivas: R_2, R_3, R_4 . . . . , de las cabezas de la viga a plomo de los montantes, i tomando como distancia polar un valor igual a $\frac{E \times h}{a}$, si construimos un polígono funicular correspondiente a dicho polígono de vectores, obtendremos la fibra media deformada.

B) DEFORMACION DE LAS BARRAS DEL ENREJADO

Consideremos un paño (fig. 2).

El alargamiento de la diagonal por unidad de lonjitud vale, segun la lei de Hooke:

$$1): \ \delta = \frac{r}{E}$$

lo que nos da como alargamiento total:

$$2): \ KM = \delta \times \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{r \times a}{E \cos \alpha}$$

siendo r la tasa de trabajo de la diagonal.

El desplazamiento relativo $K\,L$ (fig. 2), de una seccion estrema del paño con respeçto a la otra, tendrá por valor:

$$3): \ KL = \frac{KM}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{r \times a}{E \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}$$

que obtenemos introduciendo en lugar de KM el valor de la espresion (2).

La deformacion total la constituirán la suma de esos desplazamientos relativos, de un paño a otro.

Construccion gráfica

La espresion (3) puede construirse gráficamente. En efecto, si llevamos sobre una vertical unas a continuacion de otras, como fuerzas, las tasas de trabajo respectivas de las diagonales, i si trazamos el diagrama polar con una distancia polar:

$$v = E \text{ sen } \alpha \cos \alpha$$

i a una distancia del polo igual a a, luz del paño, trazamos una vertical, dicha vertical intercepta entre los radios polares, las flechas sucesivas correspondientes a cada paño o nudo. Vamos a probarlo.

De los triángulos semejantes (fig. 4) sacamos:

$$\frac{a\,b}{a_1\,b_1} = \frac{a}{E \text{ sen } \alpha \cos \alpha}$$

de donde:

$$a\,b = \frac{a \times a_1\,b_1}{E \text{ sen } \alpha \cos \alpha} = \frac{a \times r}{E \text{ sen } \alpha \cos \alpha}$$

espresion que es el valor de la flecha segun la espresion (3).

Por consiguiente nos bastará trazar por los puntos a, b, c, etc. de interseccion de la vertical que dista a del polo, con los radios polares, horizontales que nos dan sobre la vertical respectiva, i medido hasta la base, el valor de la flecha en cada nudo del enrejado.

APLICACION NUMÉRICA

Se trata de determinar la contraflecha que debe dársele a una viga de puente carretero, de 40 metros de luz

Es una viga de acero, Monié doble, con $\frac{1}{8}$ de la luz como altura.

El puente tiene 5.40 metros de ancho, i ha sido calculado para resistir a una sobrecarga de 400 kilógramos por metro cuadrado.

A): DEFORMACION DE LAS CABEZAS

Para hacer la determinacion gráfica, necesitamos conocer las tasas de trabajo de las cabezas en cada nudo.

Dichas tasas las determinaremos fácilmente teniendo trazadas las envolventes de los momentos producidos por el peso muerto i por la sobrecarga móvil.

Para la determinacion de la contraflecha tomamos en cuenta solamente el peso muerto. Los depurados nos dan los valores siguientes a plomo de cada montante:

N.° de la Seccion	VALOR DEL MOMENTO SOLICT.		Valor del $\frac{I}{V}$ resistente	TASAS DE TRABAJO	
	Por peso muerto	Total		P. M.	Total
	Klgmts.	Klgmts.	Mlmts.³	K×m/m² I	K×m/m² II
1	....	....	....	....	....
2	55000	102000	42927550	1,1	2,4
3	107000	200000	»	2,5	4,6
4	152000	282000	»	3,5	6,5
5	186000	344000	»	4,3	8,0
6	209000	392000	52981360	4,0	7,4
7	225000	424000	»	4,2	8,0
8	237000	448000	»	4,4	8,4
9	240000	452000	»	4,5	8,6

En el mismo cuadro hemos apuntado el valor de los momentos totales producidos por el peso muerto i sobrecarga, que nos servirán para la determinacion de la flecha total.

Llevamos sobre una vertical los valores de la columna I, i con una distancia polar igual a $\frac{E\times h}{a}$, construimos un polígono funicular que nos da la fibra media deformada de la viga.

$$Valor\ de\ \frac{E\times h}{a}$$

En los enrejados, el valor de E, para el acero se toma de 17000 a 19000, nosotros hemos adoptado 18000, h que es la altura de la viga vale 4.90 metros, i a luz del paño: 2.50 metros.

Tenemos:

$$\frac{E\times h}{a}=\frac{18000\times 4900}{2500}=35280\ \text{Kg.}\times\text{mlmtrs.}^2.$$

Escalas

De lonjitudes hemos tomado $\lambda=\frac{1}{400}$(1 c. = 4 mts.)

Para las fuerzas (tasas de trabajo): 1 mlmtr. = 2 kg. × mlmtr².

Supongamos por un momento que la escala de lonjitudes fuera la natural, entónces si tomáramos la distancia polar $\left(\frac{E\,h}{a}=35280 \text{ kg.}\right)$ a la misma escala que las fuerzas, 1 mlmtr. = 2 kg. i trazásemos el polígono funicular, tendríamos las ordenadas de la elástica en su verdadera magnitud.

Pero hemos tomado como escala de lonjitudes: $\frac{1}{400}$, lo que nos dice que para tener siempre las ordenadas en su verdadera magnitud, debemos tomar una distancia polar 400 veces menor:

$$\frac{35280}{2 \times 400}=44{,}1 \text{ mlmtrs.}$$

B): DEFORMACION DE LAS DIAGONALES

Las tasas de trabajo de las diagonales son las siguientes:

Diagonales	Tasas de trabajo totales		
r_1	9,3	kg.	× mlm.^{2}
r_2	9,3	»	»
r_3	9,2	»	»
r_4	9,25	»	»
r_5	9,25	»	»
r_6	9,2	»	»
r_7	8,65	»	»
r_8	8,77	»	»

Diagonales	Tasas de trabajo por el peso muerto	
r_1	4,9	kg. × m/m^2
r_2	4,8	»
r_3	4,7	»
r_4	4,7	»
r_5	4,6	»
r_6	4,3	»
r_7	2,7	»
r_8	2,2	»

Llevamos sobre una vertical los valores sucesivos de las tasas de trabajo, i con una distancia polar igual a E sen a cos a trazamos el diagrama polar. Despues trazamos una vertical a distancia a del polo, i tenemos interceptado sobre ella por los radios polares, los valores sucesivos de las flechas en cada nudo.

Valor de la distancia polar

Hemos visto que vale: $v = E$ sen a cos a.

Tomamos $E = 18000$:

Para la 1.ª diagonal, $a = 26° - 40.'$

sen $a = 0{,}448$

cos $a = 0{,}8936$

sen a cos $a = 0{,}40105$

E sen a cos $a = 18000 \times 0{,}40105 = 7200$

Para el resto de las diagonales

$$\alpha = 45.^\circ$$
$$\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha = 0{,}70711$$
$$E\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = 9000$$

La luz del paño es $a = 2{,}50$ mts.

Escalas

De lonjitudes $\frac{1}{400} = \lambda$

De fuerzas: 1 m/m = 2 kg.

Si tomásemos la distancia polar a la misma escala que las fuerzas, i suponiendo $\lambda = \frac{1}{1}$ tendríamos las ordenadas en su verdadera magnitud, si tomásemos $a = 2{,}50$ a escala natural.

Hemos tomado la distancia polar a escala de 1 m/m. = 200 kg. i para tener las flechas en su verdadera magnitud, debemos tomar la distancia a a una escala x;

$$f \times \frac{1}{1} = \frac{(r \times \phi) \times (a \times x)}{v \times \phi'}$$

De donde:

$$x = \frac{\phi'}{\phi} = \frac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{100}$$

I como

$$a = 2{,}50$$
$$a \times x = 25 \text{ m/m.}$$

Trazando una vertical a 25 mlms. del polo, tenemos sobre ella, interceptada por los radios polares, el valor de las flechas buscadas.

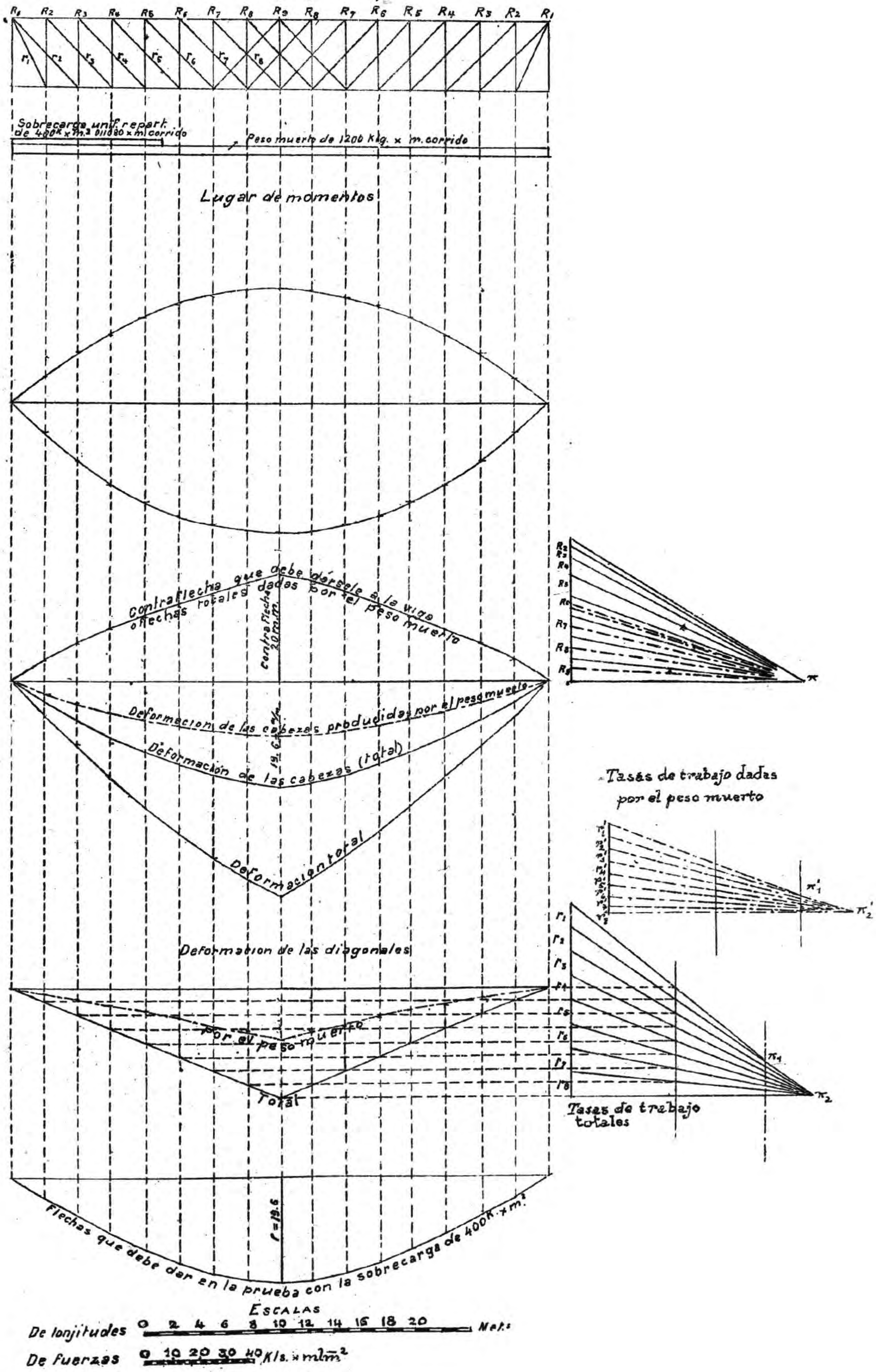
Basta llevar por horizontales sobre las verticales correspondientes los segmentos interceptados, i tenemos así en cada nudo el valor de la flecha respectiva.

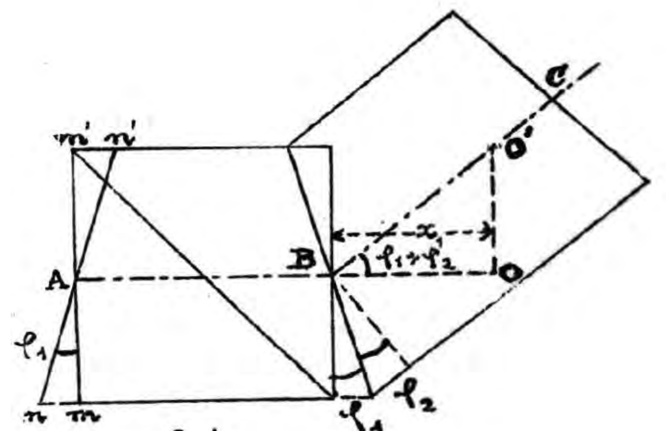
Análoga construccion se ha hecho tomando las tasas de trabajo que corresponden al peso muerto solamente, i queda indicada de línea — - —, la elástica respectiva.

Sumando ahora los desplazamientos verticales producidos por los momentos con los debidos a los esfuerzos de corte, tenemos la elástica efectiva de la viga, sea la debida al peso muerto obrando solo i que nos da la contraflecha que debe dársele a la viga al armarla, sea la elástica que se produce con la sobrecarga rodante, lo que nos permite conocer la flecha que debe dar la viga en la prueba por la carga uniformemente repartida.

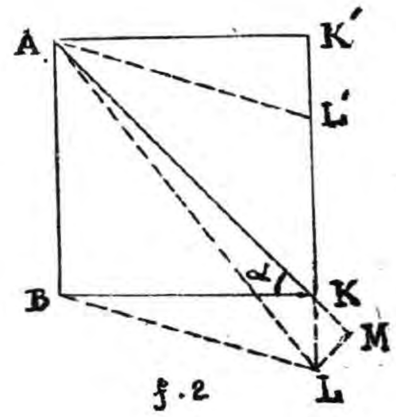
EDUARDO REYES COX,
Injeniero civil

Determinacion de la elástica en la viga principal





f.1



f.2