

ANÁLISIS DE DIVERSOS TIPOS

DE ARMADURAS ARTICULADAS, BAJO EL PUNTO DE VISTA ECONÓMICO

En la entrega de estos «Anales» correspondiente al mes de Setiembre de 1893, habia publicado el infrascrito un artículo con el título de *«Exámen sintético-analítico de la disposición mas económica para construcciones simples de fierro,»* i lo habia concluido con estas palabras:

«El autor se reserva estender el método sintético-analítico indicado a otros tipos de construcción ménos sencillos, etc., ect.»

Es esta promesa, hecha a mí mismo, la que voi a cumplir en parte por el presente trabajo, que se debe considerar como continuacion del anterior, aunque podrá entenderse independientemente de aquel.

I La figura 1 (a) representa una viga horizontal AB, apoyada en sus extremos i reforzada en su punto medio C por una palanca vertical CD, cuyo otro extremo es sostenido por los puntales oblicuos AD i BD. Suponiendo que la viga AB, cuya longitud sea $= 2l$, tenga que soportar una carga continua i uniforme de $2p$ toneladas por metro corrido, nos proponemos el siguiente problema:

¿Cuál debe ser la longitud de la pa'anca vertical CD, para que la construccion exija un mínimum de material (fierro)?

La carga total es $= 2l \times 2p = 4pl$ toneladas i repartiéndola sobre los puntos de apoyo A i B i el nudo C, tenemos en este úl-

timo una fuerza vertical $= 2pl$ i en cada uno de los primeros una $id = pl$.

Las resistencias de apoyo serán $A = B = 2pl$, yendo ambas fuerzas dirigidas hacia arriba, de manera que en cada uno de los puntos de apoyo queda una fuerza vertical $= pl$ toneladas, dirigida hacia arriba.

Quedando determinado así el sistema de fuerzas exteriores que afectan nuestra construcción, podemos pasar a determinar los esfuerzos producidos en sus piezas componentes por medio de un diagrama de Cremona, que se construirá de la manera siguiente: [fig. 1 (b)]

Después de haber establecido una escala de fuerzas conveniente, trazamos una vertical $ab = pl$ toneladas; por el punto b una paralela a la barra AC, es decir, una horizontal, i por a una paralela a la barra AD, obteniendo así el triángulo de fuerzas abc , cuyas flechas van como queda indicado en la figura 1(b) i trasladándolas a la figura primitiva, se llega a conocer que la barra AC sufre una *compresión*, cuya intensidad queda representada por la longitud del lado bc traducida a toneladas conforme a la escala de fuerzas establecida, i la barra AD una *tracción* $= ac$.

Pasando ahora al nudo C, tenemos en este punto dos fuerzas conocidas, la compresión de la barra AC i una fuerza vertical $= 2pl$ i podemos construir los esfuerzos producidos en las barras CB i CD de la manera siguiente: Partiendo del punto c recorremos el lado cb que representa la compresión en la barra AC; verticalmente debajo de a aplicamos una distancia $bd = 2pl$ de suerte que $ba = ad = pl$, por d trazamos una paralela a la barra BC, es decir una horizontal, i por el punto de partida c una paralela a CD, es decir una vertical, obteniendo así el cuadrilátero de fuerzas cd/fc , correspondiente al nudo C; trasladando sus flechas a este nudo, se vé que la barra BC sufre una compresión $= df = bc$, i la barra CD una *idem* $= fc = bd = 2pl$ to-

neladas. Trazando la recta af , ésta irá paralela a la barra BD, i al nudo C corresponde el triángulo de fuerzas $afca$, que nos dice que la barra BD está sujeta a una traccion $= af = ac =$ traccion en la barra AD.

Al nudo B le corresponde el triángulo de fuerzas $dafd$.

Como era evidente *a priori* por razon de simetria, las compresiones de las barras AC i BC i asi mismo las tracciones en los puntales AD i BD resultan respectivamente iguales. (x)

Cuando una barra prismática, que forma parte integrante de una construccion, tiene que resistir a un esfuerzo máximo $= S$, se le dará una seccion transversal v proporcional a S , de manera que en jeneral $v = KS$, donde K es el coeficiente de resistencia que dependerá de la clase i calidad del material empleado i tambien del grado de seguridad que se quiere dar a la obra; para el mismo material será en jeneral diferente en los casos de compresion o traccion. En el primer caso lo designamos por m i en el segundo por n .

Siendo la longitud de la barra $= L$, su volúmen será:

$$V = Lv = KLS$$

Designando la longitud variable de la barra CD por x , la del puntal AD por z i los volúmenes de las barras AC, CD i AD respectivamente por V_1 , V_2 i V_3 , resulta de lo que precede que:

$$(1) \quad V_1 = m_1 \times bc; \quad (2) \quad V_2 = m_2 \times cf; \quad (3) \quad V_3 = n_3 \times ac$$

Como los triángulos ACD i cba son semejantes, se deducen las siguientes proporciones:

NOTA. —(x) La prolijidad excesiva usada en estas esplicaciones va en obsequio a aquellos lectores que acaso estén poco versados en los procedimientos grafostáticos.

$$bc:l = ab:x, \text{ luego } bc = \frac{ab \times l}{x} = \frac{pl^2}{x}$$

$$ac:z = ab:x, \text{ luego } ac = \frac{ab \times z}{x} = \frac{plz}{x}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (1) i (3) i teniendo presente que $cf = 2pl$ i $z^2 = x^2 + l^2$ resulta:

$$V_1 = \frac{mpl^3}{x}; \quad V_2 = 2mplx; \quad V_3 = \frac{npl(x^2 + l^2)}{x}$$

El volúmen total del material que entra en la obra es:

$V = 2V_1 + V_2 + 2V_3$; por consiguiente:

$$V = \frac{2mpl^3}{x} + 2mplx + 2nplx + \frac{2npl^3}{x}, \text{ o sea}$$

$$V = 2pl(m+n)\left(\frac{l^2}{x} + x\right)$$

Se trata de determinar el valor de x que produzca un *valor mínimo* del volúmen total V .

Prescindiendo del factor constante $2pl(m+n)$, podemos escribir:

$$y = \frac{l^2}{x} + x$$

Diferenciando resulta

$$y' = -\frac{l^2}{x^2} + 1 = 0, \text{ luego}$$

$$-l^2 + x^2 = 0, \text{ o finalmente } x = l.$$

Para la segunda derivada de y obtenemos

$$y'' = +\frac{2l^2}{x^3}, \text{ es decir un valor positivo, lo que}$$

nos asegura que el valor $x=1$ produce un valor *mínimo* de V .

Por consiguiente nuestro problema tiene la siguiente solución sencilla:

Para consultar la mayor economía de material en el tipo de construcción representado en la figura 1 (a), la barra vertical CD se hará igual a la mitad de la longitud de la viga AB.

Observaremos de paso que en este caso los puntales AD i BD son perpendiculares entre sí i cada una de ellas forma con la viga horizontal un ángulo $= 45^\circ$.

Lo notable en nuestro resultado es que este es completamente independiente de los coeficientes de seguridad m i n, es decir de la clase i calidad del material que se emplee.

Haciendo $x=1$ en la expresión arriba obtenida para el volumen total V , resulta:

$$\min. V = 2pl(m+n) \left(\frac{1^2}{1} + 1 \right) = 4pl^2(m+n)$$

Haciendo $x = \frac{1}{2}l$, resultaría:

$$V = 2pl(m+n) \left(2l + \frac{1}{2}l \right) = 5pl^2(m+n)$$

i con $x=2l$:

$$V = 2pl(m+n) \left(\frac{1}{2}l + 2l \right) = 5pl^2(m+n)$$

Esto nos dice que:

Ya sea reduciendo la longitud de la barra vertical $CD=l$ a su mitad, ya sea aumentándola hasta el doble, en ambos casos la cantidad de material exigible bajo las mismas condiciones de carga, resistencia i seguridad, aumentaría en un 25%

Esta sola especificación del resultado obtenido bastará para que nadie pueda negar la importancia práctica de nuestras in-

vestigaciones, que a primera vista pueden haber parecido de interés puramente teórico.

II, Pasamos ahora a resolver el mismo problema con respecto a la misma construcción anterior, pero inclinada de tal modo que la viga AB forme con la vertical un ángulo $\alpha = r$. [véase fig. 2 (a)]. Suponemos otra vez una carga continua i uniforme de $2p$ toneladas por metro corrido de la viga inclinada $AB = 2l$.

El diagrama de Cremona correspondiente se construirá de la siguiente manera: [fig. 2 (b)]

Se traza una vertical $ab = pl$ toneladas, por b una paralela a AC i por el punto a otra paralela al puntal AD, obteniendo así el triángulo de fuerzas $abca$, el que, despues de trasladar sus flechas al nudo A, nos dice que la barra AC sufre una compresion $= bc$ i la barra AD una traccion $= ac$.

Pasando al nudo C, recorrimos $cb =$ compresion de la barra AC; verticalmente debajo de b aplicamos una distancia $bd = 2pl$, de suerte que $ba = ad = pl$, por el punto d trazamos una paralela a la viga inclinada i por el punto de partida c una paralela a la barra CD, la que irá naturalmente perpendicular a bc , obteniendo así el cuadrilátero de fuerzas $cbdfc$, que nos dice que la barra BC está sujeta a una compresion $= df$ i la pieza CD a una idem $= fc$. Trazando la recta fa , esta debe ir paralela a BD i el triángulo de fuerzas correspondiente al nudo D es $acfa$ i nos da el resultado que el puntal BD tiene que resistir a una traccion $= af$.

Al nudo B le corresponde el triángulo de fuerzas $dafdb$, que solamente contiene fuerzas ya conocidas.

Conservando los principios establecidos en el problema anterior i designando los volúmenes de las barras AC, CD, AD, BC i BD por V_1, V_2, V_3, V_4 i V_5 , resulta:

$$V_1 = ml \times bc, \quad V_2 = my \times cf, \quad V_3 = nz \times ac,$$

$$V_4 = ml \times df, \quad V_5 = nz \times af.$$

Consideranda como incógnita o variable independiente el ángulo x , que el puntal AD forma con la viga inclinada AB , es fácil ver que

$y = \text{tg} x$ i $z = \frac{1}{\cos x}$, de suerte que tenemos las ecuaciones siguientes:

$$(1) V_1 = ml \times bc, (2) V_2 = ml \text{tg} x \times cf, (3) V_3 = \frac{nl \times ac}{\cos x}$$

$$(4) V_4 = ml \times df \text{ i } (5) V_5 = \frac{nl \times af}{\cos x}$$

En nuestro diagrama de Cremona es fácil ver que los ángulos siguientes tienen los valores que se espresan en seguida:

$$\angle acb = \frac{r}{2}, \angle bac = r - x, \angle cdf = 2x, \angle acf = \angle afd = 90^\circ - x,$$

$$\angle afd = x, \angle adf = r.$$

En el triángulo abc se verifican las siguientes proporciones:

$$bc:ab = \text{sen}(r-x):\text{sen} x, \text{ luego } bc = \frac{p \text{sen}(r-x)}{\text{sen} x}$$

$$ac:ab = \text{sen} r:\text{sen} x, \text{ luego } ac = \frac{p \text{sen} r}{\text{sen} x}$$

En el triángulo acf se observa desde luego que

$$af = ac = \frac{p \text{sen} r}{\text{sen} x}, \text{ i ademas se verifica la siguiente proporcion:}$$

$$cf:ac = \text{sen } 2x:\cos x, \text{ luego } cf = \frac{ac \text{sen} 2x}{\cos x}$$

$$\text{o sea } cf = 2ac \text{sen} x = 2p \text{sen} r.$$

Finalmente en el triángulo afd se verifica la proporcion:

$$df:ad = \operatorname{sen}(r+x):\operatorname{sen}x, \text{ luego } df = \frac{pl \operatorname{sen}(r+x)}{\operatorname{sen}x}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (1), (2)... (5), se obtiene:

$$V_1 = mpl^2 \operatorname{sen}r \operatorname{ctgx} - mpl^2 \operatorname{cos}r$$

$$V_2 = 2mpl^2 \operatorname{tg}x \operatorname{sen}r$$

$$V_3 = \frac{npl^2 \operatorname{sen}r}{\operatorname{sen}x \operatorname{cos}x}$$

$$V_4 = mpl^2 \operatorname{sen}r \operatorname{ctgx} + mpl^2 \operatorname{cos}r$$

$$V_5 = V_3 = \frac{npl^2 \operatorname{sen}r}{\operatorname{sen}x \operatorname{cos}x}$$

Forman lo la suma de estos valores para obtener el volúmen total V del material que entra en la construcción resulta:

$$V = 2mpl^2 \operatorname{sen}r \operatorname{ctgx} + 2mpl^2 \operatorname{sen}r \operatorname{tg}x + \frac{4npl^2 \operatorname{sen}r}{\operatorname{sen}2x}.$$

$$V = 2pl^2 \operatorname{sen}r \left(m(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctgx}) + \frac{n}{\operatorname{sen}x \operatorname{cos}x} \right), \text{ i reduciendo}$$

todo al mismo denominador $\operatorname{sen}x \operatorname{cos}x$:

$$V = 2pl^2 \operatorname{sen}r \frac{m(\operatorname{sen}^2x + \operatorname{cos}^2x) + n}{\operatorname{sen}x \operatorname{cos}x} \text{ i finalmente}$$

$$V = \frac{4pl^2 (m+n) \operatorname{sen}r}{\operatorname{sen}2x}$$

El ángulo x se debe elegir de tal modo que el volúmen total V sea un *mínimum*. Como el numerador se compone de factores constantes o sea independientes de x , esto sucederá cuando el denominador $\operatorname{sen}2x$ llegue a su valor máximo, es decir cuando

$$\operatorname{sen}2x = 1, \text{ luego}$$

$$2x = 90^\circ \text{ i } x = 45^\circ$$

Este valor de x hace que $y = CD = 1$, en cuyo caso los dos puntales AD i BD son perpendiculares entre sí. Llegamos así a la siguiente sorprendente conclusión: *Aun cuando la viga está inclinada, las dimensiones mas económicas de las piezas componentes de nuestro tipo de construcción, se obtienen, dando a la barra perpendicular CD una longitud igual a la mitad del largo oblicuo de la viga.*

Nótese que este resultado es independiente, no solamente de los coeficientes de seguridad m i n , sino tambien del grado de inclinacion de la viga.

Con $x = 45^\circ$ o $\sin 2x = 1$, resulta

$$\text{mín } V = 4 \text{ pl}^2 (m + n).$$

Como se vé, hai concordancia entre este resultado i el que hemos obtenido mas arriba.

III.—Examinaremos ahora bajo el mismo punto de vista el caso de una viga inclinada AB [fig. 3 (a)], reforzada en un punto C por una barra vertical CD i los puntales AD i BD .

Los segmentos AC i CD de la viga los designaremos por s i s' . Repartiendo la carga continua i uniforme de $2p$ toneladas por m. c. sobre los puntos de apoyo A i B i el nudo C , tenemos en el último una fuerza exterior vertical $= 2pl$ i en los dos primeros fuerzas verticales iguales a ps i ps' respectivamente; las resistencias de apoyo son $2pl$ cada una; de manera que en el punto A queda una fuerza vertical dirigida hácia arriba $= 2pl - ps = p(2l - s) = ps'$ i en el punto B otra $= 2pl - ps' = p(2l - s') = ps$. Según esto el diagrama de Cremona correspondiente se construye: traza la una distancia vertical $ab = ps'$, por a i b se trazan paralelas respectivamente a AD i AC , obteniendo así el triángulo de fuerzas abc , siendo bc = compresion de la barra AC i ac = traccion del puntal AD . El cuadrilátero de

fuerzas correspondiente al nudo C es $c \delta d f$, donde $bd = 2pl$, luego $ad = ps$, porque $s + s' = 2l$; los lados df i fc representan respectivamente las compresiones que sufren las barras BC i CD. La recta fa debe ir paralela a BD i representa la tracción a que está sujeto el puntal BD, pues el triángulo de fuerzas correspondiente al nudo D es $c a f c$, i el que corresponde al punto B es $d a f d$, pero no contiene ningún esfuerzo nuevo.

Conservando las designaciones establecidas en el problema anterior i con las que van marcadas en la fig. 3 (a) resulta:

$$V_1 = ms \times bc; V_2 = mx \times cf; V_3 = ny \times ac;$$

$$V_4 = ms' \times df; V_5 = nz \times af.$$

De la semejanza de los triángulos ACD i cba se deduce las siguientes proporciones:

$$bc : s = ps' : x, \text{ luego } bc = \frac{ps's'}{x}$$

$$ac : y = ps' : x, \text{ luego } ac = \frac{ps'y}{x}$$

La semejanza de los triángulos CBD i fda da:

$$af : z = ps : x, \text{ luego } af = \frac{psz}{x}; \text{ ademas se observa que}$$

$$df = bc = \frac{ps's'}{x} \text{ i } cf = bd = 2pl.$$

Sustituyendo estos valores en las espresiones para los volúmenes de las 5 barras, i teniendo presente que:

$$y^2 = x^2 + s^2 + 2sxcosr \text{ i}$$

$$z^2 = x^2 + s'^2 - 2s'xcosr, \text{ resulta:}$$

$$V_1 = \frac{m p s^2 s'}{x}; \quad V_2 = 2 m p l x; \quad V_3 = \frac{n p s'}{x} (x^2 + s^2 + 2 s x \cos r)$$

$$V_4 = \frac{m p s s'^2}{x}; \quad V_5 = \frac{n p s}{x} (x^2 + s'^2 - 2 s' x \cos r)$$

Sumando estos volúmenes parciales, para obtener el volumen total V del material que entra en la construcción, resulta:

$$V = \frac{m p s s'}{x} (s + s') + 2 p m l x + n p x (s + s') + \frac{n p s s'}{x} (s + s'), \text{ i tomando en cuenta que } s + s' = 2l,$$

resulta finalmente:

$$V = 2 p l (m + n) \left[\frac{s s'}{x} + x \right]$$

El valor mínimo de esta función de x , resultará igualando a 0 la primera derivada de la función

$$y = \frac{s s'}{x} + x, \text{ es decir}$$

$$y' = -\frac{s s'}{x^2} + 1 = 0, \text{ i}$$

$$x = \sqrt{s s'}$$

Llegamos así a la siguiente elegante:

SOLUCION.—Para conseguir la mayor economía posible de material en el tipo de construcción, representado en la fig. 3 (a) es preciso dar a la barra vertical CD una longitud igual a la media proporcional geométrica entre los dos segmentos s i s' .

Como se vé, el resultado no puede ser mas sencillo i es de fácil construcción.

Este problema envuelve como caso particular el contemplado en el problema I; en efecto, con

$$s=s'=l, \text{ resulta } x=\sqrt{l^2}=\sqrt{l^2}=l$$

IV.—Consideraremos ahora la construcción representada en la fig. 4 (a), donde la barra CD va perpendicular a la viga inclinada AB i su punto de arranque C divide la viga en los dos segmentos $AC=s$ i $BC=s'$.

La fig. 4 (b) es el diagrama de Cremona correspondiente, siendo la vertical $ab=ps'$, bc i ac resp. paralelas a AC i AD; $bd=2pl$, luego $ad=ps$; las líneas cf i df van resp. paralelas a las barras CD i BC, luego cf perpendicular a bc i df paralela a bc ; la recta que une f con a debe ir paralela al puntal BD. Las distancias bc i df representan respectivamente las compresiones sufridas por las barras AC i BC; la longitud cf es la compresión en la barra CD i las tracciones que afectan los puntales AD i BD se miden respectivamente por las distancias ac i af .

Segun esto, i designando siempre por V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , V_5 los volúmenes de las piezas AC, CD, AD, BC i BD, tenemos:

$$V_1 = ms \times bc; \quad V_2 = mx \times cf; \quad V_3 = ny \times ac;$$

$$V_4 = ms' \times df; \quad V_5 = nz \times af.$$

En la fig. 4 (a) trazamos las siguientes líneas auxiliares: por el punto D una vertical hasta su encuentro en E con la línea AB; por A una perpendicular a la línea AB hasta su encuentro en F con la prolongación del puntal BD.

Es fácil ver que los triángulos ADE i cab son semejantes; por consiguiente se verifica la proporción:

$$bc:AE=ab:DE, \text{ luego}$$

$$bc = \frac{ps' \times AE}{DE} \text{ pero}$$

$$AE = AC - CE = s - x \operatorname{ctgr} i \quad ED = \frac{x}{\operatorname{sen} i};$$

sustituyendo estos valores de AE i DE se obtiene:

$$bc = \frac{ps'(s - x \operatorname{ctgr}) \operatorname{sen} r}{x} = \frac{ps'(s \operatorname{sen} r - x \operatorname{cos} r)}{x}$$

i como $V_1 = ms \times bc$, resulta:

$$(1) \quad V_1 = \frac{mps^2 s' \operatorname{sen} r}{x} - mpss' \operatorname{cos} r.$$

Trazando en la fig. 4 (b) la recta $b_3 r$ paralela a cf , se ve que

$$cf = bg = ab \operatorname{sen} r = 2pl \operatorname{sen} r, \text{ luego}$$

$$(2) \quad V_2 = 2mplx \operatorname{sen} r.$$

De la semejanza de los mismos triángulos nombrados se deduce la proporcion:

$$ac : AD = ab : DE, \text{ luego}$$

$$ac = \frac{AD \times ab}{DE}, \text{ o sea}$$

$$ac = \frac{ps' y \operatorname{sen} r}{x}; \text{ por consiguiente}$$

$$V_3 = \frac{nps' y^2 \operatorname{sen} r}{x} = \frac{nps' \operatorname{sen} r (x^2 + s^2)}{x}, \text{ o}$$

$$(3) \quad V_3 = nps' x \operatorname{sen} r + \frac{nps^2 s' \operatorname{sen} r}{x}.$$

Son semejantes tambien los triángulos EDB i daf , por consiguiente:

$$df : BE = ad : DE \quad i \quad df = \frac{BE \times ad}{DE}.$$

pero $BE = BC + CE = s' + x \operatorname{ctgr} r$, luego

$$df = \frac{ps(s' + x \operatorname{ctgr} r) \operatorname{sen} r}{x} = \frac{pss' \operatorname{sen} r}{x} + p \operatorname{scos} r$$

i como $V_1 = ms' \times df$, obtenemos:

$$(4) \quad V_1 = \frac{mpss'^2 \operatorname{sen} r}{x} + mpss' \operatorname{cos} r.$$

De la semejanza de los mismos triángulos anteriores se deduce:

$$af:BD=ad:DE, \text{ luego } af = \frac{pszs \operatorname{sen} r}{x}$$

por consiguiente: $V_2 = \frac{npsz^2 \operatorname{sen} r}{x} = \frac{nps \operatorname{sen} r (x + \frac{2s'^2}{x})}{x}$ i finalmente:

$$(5) \quad V_2 = npsx \operatorname{sen} r + \frac{npss'^2 \operatorname{sen} r}{x}.$$

Sumando convenientemente los volúmenes parciales $V_1, V_2, \dots, V_n$, se obtiene para el volumen total V la expresion siguiente:

$$V = \frac{mpss'(s + s') \operatorname{sen} r}{x} + np x (s + s') \operatorname{sen} r + \frac{npss'(s + s') \operatorname{sen} r}{x} + 2m p l x \operatorname{sen} r.$$

Teniendo presente que $s + s' = 2l$, resulta:

$$V = 2pl \operatorname{sen} r \left[\frac{(m+n)s s'}{x} + (m+n)x \right] \text{ i finalmente}$$

$$V = 2pl(n+n) \operatorname{sen} r \left[\frac{ss'}{x} + x \right]$$

Este volumen total alcanza su valor mínimo, cuando

$$x = \sqrt{ss'}$$

Resulta: $\min V = 4pl \sqrt{ss'} (m+n) \operatorname{senr}.$

De paso observaremos que en este caso los puntales AD i BD forman un ángulo recto.

Los problemas I i II son casos particulares de este.

Observación: El método analítico riguroso prescribe plantar i resolver los problemas bajo la forma mas jeneral que puedan asumir. Hemos preferido, sin embargo, desviarnos de esta regla, tratando primero los casos particulares mas señalados i sencillos, para elevarnos gradualmente a la solución jeneral del problema. Para adoptar este temperamento nos han guiado las siguientes razones:

1.º Queríamos evitar de asustar o confundir al lector desde el principio con fórmulas demasiado complicadas;

2.º Los casos particulares admiten tambien soluciones particulares, que no fluirían de la solución jeneral, i sirven, sin embargo, para hacer resaltar mejor la índole especial de nuestro procedimiento, que *consiste en una combinación conveniente de las construcciones grafostáticas con el cálculo analítico*, coronada como se vé por el éxito.

3.º Las soluciones de los casos particulares conducen gradual i naturalmente a la solución jeneral, de suerte que esta última no aparece ex-abrupto.

4.º En jeneral, somos de opinión que el autor de alguna idea o procedimiento nuevos debe comunicar su descubrimiento segun el orden i conforme a las fases del desarrollo que hayan tenido en su espíritu, pues así puede esperar de ser comprendido mejor.

Por todas estas razones, solo al último pasamos a abordar la cuestión que nos ocupa, bajo su aspecto mas jeneral:

V. En la figura 5 (a) la palanca de refuerzo CD forma con la viga inclinada AB un ángulo cualquiera q .

La figura 5 (b) demuestra el diagrama de Cremona corres-

pendiente, construido según los mismos principios ya algunas veces desarrollados. Las rectas cf i af van respectivamente paralelas a CD i BD . Como líneas auxiliares trazamos por D la vertical DE i por A una paralela a la palanca CD , hasta que encuentre la prolongación de BD en el punto F . Es fácil ver que $\angle CDE = r - q$.

De la semejanza de los triángulos AED i cba se deduce la proporción:

$$bc : AE = ab : DE, \text{ luego } bc = \frac{ps' \times AE}{DE}.$$

Por otra parte: $AE = AC + CE$, i en el triángulo CDE se verifica la proporción:

$$CE : CD = \sin(r - q) : \sin r, \text{ luego } CE = \frac{x \sin(r - q)}{\sin r};$$

$$AE = s + \frac{x \sin(r - q)}{\sin r}; \text{ del mismo triángulo resulta además:}$$

$$DE : CD = \sin q : \sin r, \text{ luego } DE = \frac{x \sin q}{\sin r}.$$

Sustituyendo estos valores de AE i DE , resulta:

$$bc = \frac{ps' \left(s + \frac{x \sin(r - q)}{\sin r} \right) \sin r'}{x \sin q} \text{ Por consiguiente:}$$

$$V_t = ms \times bc = \frac{mps's' \{ s \sin r + x \sin(r - q) \}}{x \sin q}; \text{ finalmente:}$$

$$(1) V_t = \frac{mps's' \sin r}{x \sin q} + \frac{mps's' \sin(r - q)}{\sin q}.$$

Trazando en la figura 5 (b) por d una paralela a la recta fc , hasta que encuentre la bc en g , se ve que $dg = cf$. En el triángulo bdg se verifica la proporción:

$$dg:bd = \text{sen}r: \text{sen}q, \text{ luego } dg = cf = \frac{2pl \text{ sen}r}{\text{sen}q}$$

$$i \quad (2) \quad V_2 = mx \times cf = \frac{2mplx \text{ sen}r}{\text{sen}q}.$$

La semejanza de los mismos triángulos anteriores nos da esta otra proporción:

$$ac:y=ab:DE, \text{ luego } ac = \frac{ps'y \text{ sen}r}{x \text{ sen}q}; \text{ por consiguiente:}$$

$$V_3 = \frac{nps'y^2 \text{ sen}r}{x \text{ sen}q} = \frac{nps'y \text{ sen}r}{x \text{ sen}q} (x + s^2 + 2sxcosq), \text{ o}$$

$$(3) \quad V_3 = \frac{nps'x \text{ sen}r}{\text{sen}q} + \frac{nps'^2 \text{ sen}r}{x \text{ sen}q} + \frac{2npss' \text{ sen}r \cos q}{\text{sen}q}.$$

Son semejantes tambien los triángulos DEB i *adf*; de aqui:

$$df:BE = ad:DE; \text{ luego } df = \frac{ps \times BE}{DE}; \text{ pero}$$

$$BE = BC - CE = s' - \frac{x \text{ sen}(r-q)}{\text{sen}r}; \text{ por consiguiente:}$$

$$df = \frac{ps[s' \text{ sen}r - x \text{ sen}(r-q)]}{x \text{ sen}q}, \text{ i como } V_4 = ms' \times df$$

resulta:

$$(4) \quad V_4 = \frac{mpss'^2 \text{ sen}r}{x \text{ sen}q} - \frac{mpss' \text{ sen}(r-q)}{\text{sen}q}.$$

De la semejanza de los mismos triángulos fluye esta otra proporción:

$$af:z=ad:DE, \text{ luego } af = \frac{psz \text{ sen}r}{x \text{ sen}q}, \text{ luego}$$

$$V_5 = nz \times af = \frac{npsz^2 \text{ sen}r}{x \text{ sen}q} = \frac{nps \text{ sen}r}{x \text{ sen}q} (x^2 + s'^2 - 2s'x \cos q), \text{ o}$$

$$(5) \quad V = \frac{npss \operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} q} + \frac{npss'^2 \operatorname{sen} r}{x \operatorname{sen} q} - \frac{2npss' \operatorname{sen} r \cos q}{\operatorname{sen} q}$$

Sumando estas expresiones analíticas para los volúmenes de las cinco piezas componentes de la construcción, resulta el volumen total

$$V = \frac{mpss'(s+s') \operatorname{sen} r}{x \operatorname{sen} q} + \frac{npss'(s+s') \operatorname{sen} r}{x \operatorname{sen} q} + \frac{np x(s+s') \operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} q} + \frac{2mplx \operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} q}; \text{ i como } s+s'=2l:$$

$$V = \frac{2pl(m+n) \operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} q} \left[\frac{ss'}{x} + x \right]$$

El valor mínimo de esta función resulta de nuevo para

$$x = \sqrt{ss'}, \text{ i se obtiene:}$$

$$\min. V = \frac{4pl(m+n) \sqrt{ss'} \operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} q}$$

Cuando la palanca CD va perpendicular a la viga AB, tenemos $q = 90^\circ$, luego $\operatorname{sen} q = 1$, i mín. $V = 4p'(m+n) \sqrt{ss'} \operatorname{sen} r$, lo que está conforme con el resultado del problema anterior.

El caso del problema III resulta cuando $q = r$.

Cuando el ángulo q es diferente de 90° , es decir, cuando la palanca CD es oblicua con respecto a la viga AB, el valor de $\operatorname{sen} q$ es una fracción propia (< 1), i como $\operatorname{sen} q$ aparece en el denominador, se deduce que en este caso mín V . aumenta; p. e. para $q = 30^\circ$, sería $\operatorname{sen} q = \frac{1}{2}$, luego mín V . se duplicaría.

En resumen llegamos a la siguiente conclusión, tan interesante i sorprendente teóricamente, como importante i útil en la práctica:

Conclusión general: CUANDO SE TRATA DE REFORZAR UNA VIGA (INCLINADA O HORIZONTAL), APOYADA EN SUS ESTREMOS, EN CUAL-

QUIERA DE SUS PUNTOS, POR MEDIO DE UNA PALANCA, CUYO OTRO EXTREMO ES SOSTENIDO POR DOS PUNTALES QUE ARRANCAN DE LOS PUNTOS DE APOYO DE LA VIGA, LA ECONOMÍA RACIONAL PRESCRIBE EN TODO CASO DISPONER ESTA PALANCA PERPENDICULARMENTE A LA VIGA, I DARLE UNA LONGITUD IGUAL A LA MEDIA PROPORCIONAL JEOMÉTRICA ENTRE LOS SEGMENTOS DE LA VIGA.

Cuando condiciones particulares de la construcción exigen que la palanca de refuerzo sea vertical o forme un ángulo determinado con la viga, conviene siempre, bajo el punto de vista económico, darle la longitud espresada.

Suposición fundamental es, que todos los nudos, en que concurren dos o mas barras, estén provistos de articulaciones, i la misma viga AB se componga de dos partes (segmentos) independientes i unidos en el nudo C.

Se comprende ya que nuestro análisis económico puede estenderse a todos los sistemas de barras determinados estáticamente, (en jeneral triangulares), lo que abre un horizonte inmenso a nuestras investigaciones.—Al final de nuestro artículo anterior habíamos opinado que estas podían conducir a resultados provechosos para la práctica. Esta esperanza se ha realizado en parte por el presente trabajo i nos sentimos animados para avanzar mas en la esploración de este terreno nuevo, que ya se muestra mas despejado. En una série de artículos posteriores publicaremos los resultados.

Antes de concluir, el autor se permite observar, que *los cálculos son originales i los resultados obtenidos enteramente nuevos.*

JULIO PFLÜGER

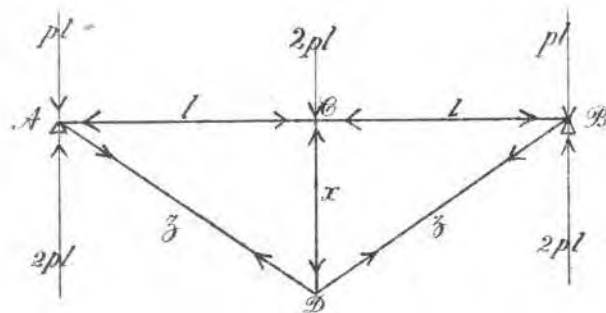
Profesor de Matemáticas.

Santiago, Noviembre de 1895.

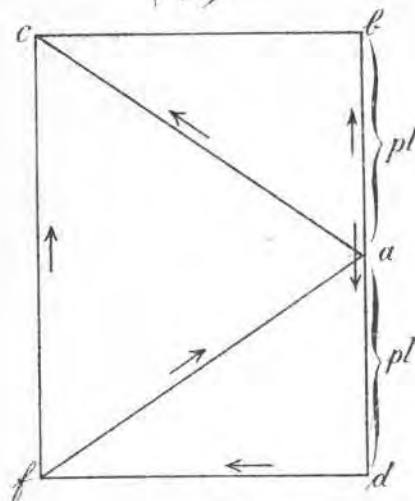
Lámina de Figuras (1)

(a)

Fig 1.

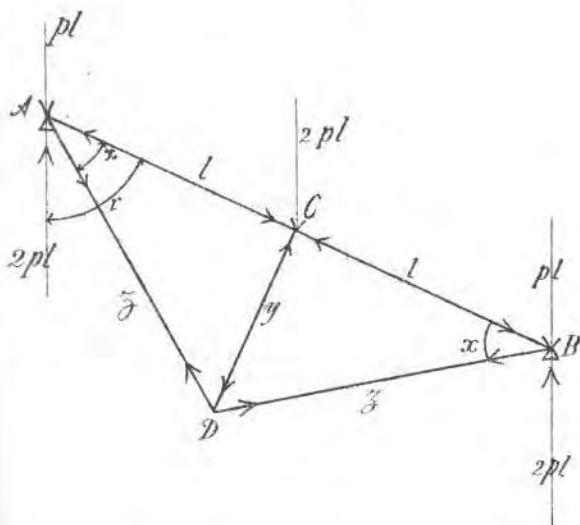


(b)

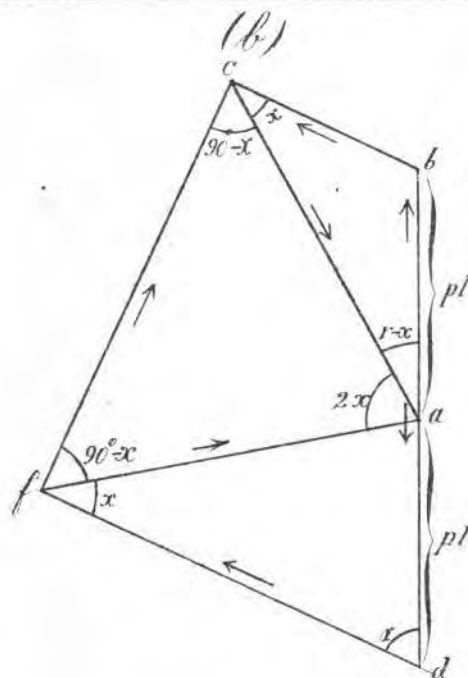


(a)

Fig 2.

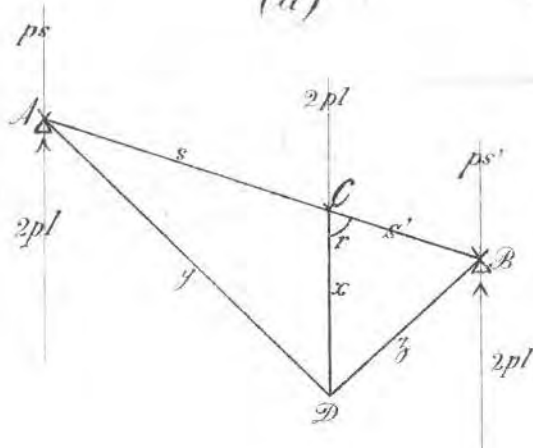


(b)



(a)

Fig 3.



(b)

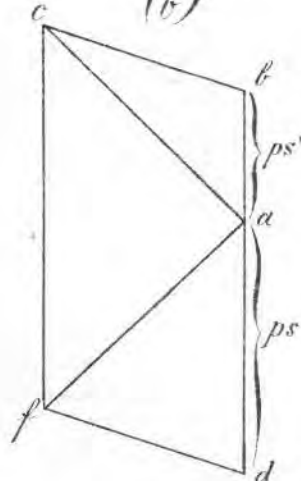


Lámina de Figuras (II)

Fig 4.

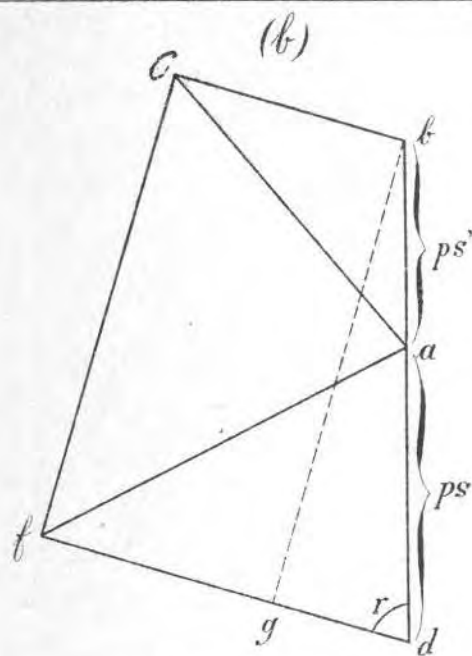
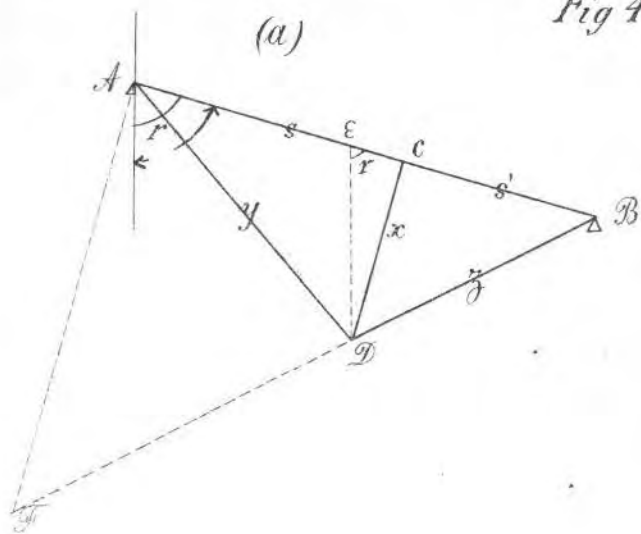


Fig 5.

