RESEÑAS

[Sobre el "Paraíso de Cantor"]

Roberto Torretti

Cuando la Editorial Universitaria me envió el libro de Roberto Torretti, "El paraíso de Cantor: la tradición conjuntista en la filosofía matemática", comprendí que tenía frente a mí a una gran obra, un libro de ágil estilo, y cuyo contenido iba más allá de lo de otros con objetivos similares. Supe que estaba frente a algo fundamental, es un libro culto, escrito con saber y distancia.

Al autor lo conocía de oídas, cuando ingresé a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, en 1969, él era reputado por su rigor y profundidad. Después supe de él por Enrique d'Etigny y hoy agradezco haber recibido una lección acabada, enorme, que me tocó mucho en lo personal, 30 años después.

Otros filósofos de las ciencias y lógico-matemáticos de mayor competencia que la mía sobre el núcleo temático del libro ya se han referido a él con justos elogios, tanto por la claridad y la profundidad de la obra del Profesor Torretti.

Así Jesús Mosterín, autoridad en el tema y profesor de la Universidad de Barcelona escribe "El estilo de Torretti siempre es ejemplar: claro, erudito y riguroso a la vez. Torretti habla de temas muy difíciles del modo más claro posible" pero en que la búsqueda de claridad no sacrifica el rigor y sobre el libro asevera "el libro El paraíso de Cantor es la obra mejor y más completa que jamás se ha escrito en español sobre los fundamentos y la filosofía de la matemática. Con ésta su autor acaba de perfilarse como auténtico maestro en todos los campos de la filosofía teórica". ¿Y cuál es el valor de la teoría presentada?: "las matemáticas son la más grande aventura del espíritu humano, una combinación de lo mejor del arte y de la ciencia, de las más libre creatividad y de la más rigurosa disciplina. Torretti nos presenta las reflexiones, teorías y resultados sobre los fundamentos de la matemática desarrollados por una pléyade incomparable de lógicos, filósofos y matemáticos geniales a fines del siglo pasado y en el primer tercio de éste".

Y Francisco Rodríguez, de la Universidad de Valencia resume "su lectura requiere esfuerzo, éste sería muy probablemente mayor si fuera otra la pluma que lo firma. Quien esto escribe no conoce nada similar, ni en extensión, ni en enfoque, ni en calidad, no ya en castellano, sino en ninguna otra lengua, así que da por sentado que la obra se traducirá pronto".

El título del libro "El Paraíso de Cantor" es una frase-programa de Hilbert referida al universo matemático conceptual que se asienta en una formulación rigurosa de la teoría de conjuntos que hizo Cantor. Y gran parte del libro describe la lucha dramática en lo conceptual, de matemáticos y lógicos en los primeros 30 años de este siglo, por dar seguridad a las bases de este paraíso.

El libro comienza describiendo el aporte de Cantor, gran matemático, solitario, quién revolucionó las matemáticas colocando las preguntas esenciales sobre sus fundamentos y dejando trazado los caminos para las respuestas.

Cantor habitó en una época contemporánea a la de otros, que como Nietzsche y Van Gogh, produjeron quiebres fundamentales en otros dominios. Pero gracias a la estructura de las matemáticas y a su particular estilo y forma de valorización conceptual, el hombre Cantor y su drama no eclipsaron ni falsearon la obra de Cantor. Eso se lo agradezco a Torretti, no ceder a la tentación biográfica y concentrarse en guiarnos a través de las ideas fundamentales de Cantor: su camino teórico precisando la idea de conjunto, lo que está estrechamente ligado a conceptualizar el infinito, y esto lo hizo vía los cardinales y los ordinales, estos últimos ligados al problema analítico de expansión de funciones como series de funciones trigonométricas. Torretti toca todo el ámbito de la idea, así nos muestra la clara conciencia que Cantor tenía sobre el valor de sus investigaciones, que tocaban temas de importancia filosófica e incluso teológica. Para no extraviarse en este tema Cantor tenía un marco rigurosamente definido de las matemáticas "el caudal de sus ideas tiene que considerar única y exclusivamente la realidad inmanente de su conceptos y no las relaciones con el mundo exterior".

Torretti nos muestra con rigor matemático como Cantor llega al problema de bien ordenar los reales, problema que a cualquier matemático de esa época que no participara del paraíso que él estaba construyendo, hubiera chocado y este fue el caso de Borel y Lebesgue. Se reproduce incluso una demostración tentativa de Cantor para probar que todo conjunto está bien ordenado. La argumentación sorprende por su forma matemática, la contradicción clave muestra que si tal conjunto no estuviera bien ordenado, no sería conjunto. Posteriormente se describe la falsa prueba de Julius Koëning de que lo reales no estaban bien ordenados y finalmente la demostración de Zermelo (1904) que cualquier conjunto puede ser bien ordenado y esto basado en el axioma de elección, que había sido utilizado sin sospechar que era un axioma por matemáticos franceses y que lo colocaron en duda cuando vieron sus consecuencias.

Y aquí empieza el rol de Hilbert. Reconoció cuan inmensa era la obra de Cantor y la hipótesis del continuo fue el primero de todos los problemas que el proponía al siglo XX. Hipótesis que fue resuelta por Cohen en 1960.

Antes de continuar con la descripción del tema del libro quiero referirme a su concepción y estilo. El libro puede leerse como filósofo, lógico, matemático o quizás más precisamente por quien, como yo, se interesa por las génesis de las ideas, los virajes, las apuestas conceptuales. El autor que está presente sutilmente, vía algunas frases nos da a conocer las que él considera como inflexiones del pensamiento, lo que está en juego, o también a través de citas, que siempre son relevantes y ellas, por su elección, nos indican en parte, el pensamiento más íntimo del autor.

Es un libro difícil que, riqueza de lenguaje mediante, va capturando al lector, dándole las armas conceptuales para seguir adelante y entregando por adelantado la idea global de las dificultades que necesitan ser penetradas, abriendo el apetito para continuar. Posteriormente el autor le da un sentido (nunca El sentido) de lo que esta teoría significa en el resto de las matemáticas, su contribución al paraíso. Después de Cantor el libro se adentra en el programa de Hilbert: la axiomatización de las matemáticas. Se describe su evolución, sus cambios y adecuaciones durante los primeros 30 años del siglo, hasta el giro que tomó el programa o si se quiere su fin, con ocasión de la aparición teorema de incompletitud de Gödel.

Como dice el autor hay elementos primitivos, básicos, que debemos aceptar previo a cualquier programa: existencia de elementos distinguibles (símbolos), concatenación de símbolos, secuencias de líneas. Aceptado esto, los problemas fundamentales del programa de Hilbert o de su teoría de la prueba son:

- solubilidad de todo problema matemático;
- criterio de simplicidad de las demostraciones matemáticas;
- decidibilidad de una cuestión matemática mediante un número finito de operaciones.
- consistencia: sólo se tenía consistencia relativa, la de la geometría reposaba en los reales y la de éstos en los enteros mediante el uso de la teoría de conjuntos (Weierstrass, Dedekind). Pero axiomatizar la teoría de conjuntos y de los enteros exige axiomatizar la lógica misma y deducir de ésta la consistencia de enteros y conjuntos. Los trabajos de Frege y Russell eran fundamentales para la axiomatización de la lógica. En parte se debía probar por medios finitos que el conjunto de pruebas posibles (que son infinitas) no llevan a establecer una fórmula falsa.

La factibilidad para la realización de un programa tan radical contaba con una advertencia fundamental, la de Pincaré, quien ya en 1894 había rechazado el intento de basar la matemática en la lógica porque la edificación rigurosa de la lógica requiere de la inducción matemática. De hecho Hilbert lo había comprendido en 1904 cuando propone una fundamentación simultánea de la lógica y la matemática.

Es singular que la escuela francesa apenas aparezca en esta aventura. Por otra parte no hay prácticamente ninguna referencia a escuelas nacionales en el libro. Salvo la hecha a Poincaré y a algunos que mostraban la desconfianza de los matemáticos franceses en la sobreaxiomatización (lo que hay suena paradójico después de la importancia que tomó el grupo Bourbaki en Francia desde los años 40', como si se hubiera querido reatrapar las tres primeras decenias del siglo). Quizás la única referencia a influencias nacionales Torretti la hace sutilmente alrededor del rol que jugó Von Neumann en los fundamentos de las matemáticas y en el desarrollo del programa de Hilbert. Torretti nos dice que en los comienzos de este programa en 1904, Hilbert no fue influenciado por Koëning, quién sí influenció a Von Neumann, siendo húngaros los dos.

El teorema de incompletitud de Gödel en 1931 afectó seriamente el programa de Hilbert, que el libro expone con detalle. Aprecio particularmente que Torretti se concentre no en los programas que este teorema fundamental cierra sino en las teorías que él abre. Y dedica la parte final del libro al estudio de funciones computables y recursivas que comienza en la teoría desarrollada por Gödel, y que serán precisadas posteriormente por Kleene (1936), Church y Turing.

El programa de Hilbert contribuyó al desarrollo de grandes maquinarias conceptuales, a entender de manera significativa el quehacer matemático y a extender y precisar el dominio de las matemáticas mismas. Torretti nos describe magistralmente las elecciones, los altos, las bifurcaciones, los atajos en esta marcha. Y el valor inmenso de lo que está en juego, de las polémicas y de los disensos. En estas encrucijadas hay hechos que si bien no son conceptuales no dejan de estar relacionadas a como las ideas se consolidan. Así en el libro se refiere que Hilbert, director de Mathematische Annalen, hizo sacar a Brouwer de la lista de colaboradores, donde había estado entre 1915-1928, argumentando que no era posible la colaboración dada la incompatibilidad de puntos de vistas sobre cuestiones fundamentales. En particular Hilbert le criticaba que el querer quitarle al matemático el Principio de tercero excluído, le despojaba de una de sus herramientas fundamentales y criticaba veladamente a Brouwer expresando su asombro por el poder de sugestión que un solo hombre temperamental puede tener. El autor no se pronuncia sobre la separación de Brouwer de los Mathematische Annalen, sólo la expone.

Una reflexión última concerniente a ideas matemáticas. Hay una idea, que puede llamarse método y que fue popularizado como paradoja de Russell: la existencia del conjunto de todos los conjuntos es contradictoria matemáticamente, proposición conocida por Zermelo pero no publicada. Como el mismo Russell dice, la base argumental de su paradoja está en la prueba que hace Cantor de que el cardinal de un conjunto es menor estrictamente que el cardinal de todos sus subconjuntos. Este método que podríamos llamar diagonal y que también es la base de la prueba de Cantor que los reales no se pueden enumerar, el autor lo retrotrae a Bois-Raymond que en 1875 lo había usado para probar existencia de clases de funciones con crecimiento de determinado tipo. Y posteriormente analiza el rol que este razonamiento juega en la prueba del teorema de incompletitud de Gödel. Y es este mismo procedimiento diagonal el que encontramos tras la prueba de Ackermann (1928) en que se construye una función calculable por recursión y que crece más rápida que cualquier función pre-recursiva. El método diagonal es tanto una herramienta que prueba inexistencia por contradicción, pero también puede llevar a probar existencia aunque generalmente se hace vía contradicción, dada la existencia de otro elemento. Sin embargo puede probarse existencia con el método diagonal usando argumentos no contradictorios, como en el caso de Krylov Bogoliuvov para probar en 1937 que todo sistema dinámico definido en un conjunto deja invariante una medida.

Este razonamiento fundamental Torretti lo destaca y describe con detalle.

Torretti elige lo significativo, la evolución y los conflictos de ideas, no hay juicios perentorios, es una obra abierta. Incluso la buscada seguridad conceptual de los fundamentos de este paraíso también queda abierta. Así, sobre la demostración de Gentzen de 1936 sobre la no-contradicción de la aritmética utilizando intuitivamente la inducción transfinita hasta cierto ordinal, el autor cita la opinión del grupo Bourbaski 1970: el valor de "certeza" atribuible a tal razonamiento es sin duda menos probatorio que las exigencias iniciales de Hilbert, luego el valor de esta certeza es esencialmente cosa de la psicología personal de cada matemático. Curioso que la seguridad del paraíso se reduzca a una cuestión psicológica.

El libro del profesor Torretti no es un libro simple, es el desarrollo de ideas que están en el fundamento de nuestras construcciones teóricas y que deben ser ciertas, como dice Hilbert, por el éxito producido: el análisis matemático que es base de la física.

Quiero finalizar agradeciendo al profesor Torretti por esta obra inmensa que me sorprendió y por lo mismo considero necesaria para nuestra formación y desarrollo cultural y científico. Por último debo decir que tuve un placer infinito al leerlo.

Servet Martínez.
17 de junio de 1999